量子力学Ⅱ 講義3 まとめノート

[redacted]

DATE 5・2・火

無限小変換 $\vec{a}=\delta\vec{a}$ (1次) $U:\psi\to\psi'$ を考えると

$\psi'(\vec{r})=\psi(\vec{r}-\delta\vec{a})$

$=\psi(\vec{r})-\delta\vec{a}\cdot\vec{\nabla}\psi(\vec{r})$

$=e^{-\delta\vec{a}\cdot\vec{\nabla}}\psi$

$\simeq(1-\delta\vec{a}\cdot\vec{\nabla})\psi(\vec{r})$

$U=e^{-\vec{a}\cdot\vec{\nabla}}$

$=e^{-i\vec{a}\cdot\vec{p}/\hbar}$ $\left(\because \vec{p}=\frac{\hbar}{i}\vec{\nabla}\right)$

$U^\dagger=e^{+i\vec{a}\cdot\vec{p}/\hbar}=U^{-1}$

$U^\dagger U=UU^{-1}=1$ U:ユニタリ演算子

$\langle\psi'|\psi'\rangle=\langle\psi|U^\dagger U|\psi\rangle=\langle\psi|\psi\rangle=1$

となり、規格化を保存可能。

一般に無限小変換

$U=e^{i\delta\lambda G/\hbar}$ $(\delta\lambda\ll1)$ $G^\dagger=G$ 変換の母関数

$=1+i\delta\lambda G/\hbar$:ユニタリ

物理量 $\Theta\mapsto\Theta'$ を考える。

$\langle\psi|\Theta|\psi\rangle=\langle\psi'|\Theta'|\psi'\rangle$

$=\langle\psi|U^\dagger\Theta'U|\psi\rangle$

$=\langle\psi|\Theta|\psi\rangle$

$U^\dagger\Theta'U=\Theta$ $\quad\Theta'=U\Theta U^{-1}$

$\delta\Theta=\Theta'-\Theta$

$=(1+i\delta\lambda G/\hbar)\Theta(1-i\delta\lambda G/\hbar)$

$=i\frac{i\delta}{\hbar}[G,\Theta]$

物理量変化 ⟷ 母関数と物理量の変換子

特に $\Theta=H$ (ハミルトニアン)

$i\hbar\frac{d}{dt}|\psi\rangle=H|\psi\rangle \iff \frac{d}{dt}|\psi\rangle=\frac{1}{i\hbar}H|\psi\rangle$

$\langle G\rangle_t\equiv\langle\psi(t)|G|\psi(t)\rangle$

$\frac{d}{dt}\langle G\rangle_t=\frac{d}{dt}\langle\psi|(G|\psi\rangle)$
$+\langle\psi|G\frac{d}{dt}|\psi\rangle$

$=-\frac{1}{i\hbar}\langle\psi|HG|\psi\rangle$

$+\frac{1}{i\hbar}\langle\psi|GH|\psi\rangle$

$=\frac{1}{i\hbar}\langle\psi|[H,G]|\psi\rangle=0$

$\langle G_t\rangle$: tによらない

G:保存量

系の無限小変換(母関数G)に対する不変性

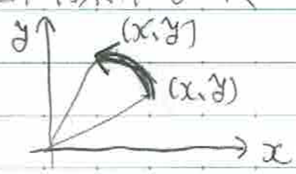
⇓

保存量G

例) 並進不変性⟷運動量保存

時間推進不変性⟷エネルギー保存

回転操作 $U=R$ $\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta&\sin\theta\\-\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$



$R:\vec{r}\mapsto\vec{r}'$

$|\vec{r}|=|\vec{r}'|$ 長さが不変な連続変換

$\vec{r}\mapsto\vec{r}'=R\vec{r}$

$R=\begin{pmatrix}\times&\times&\times\\\times&\times&\times\\\times&\times&\times\end{pmatrix}$ 3×3の実行列

$|\vec{r}|^2=\tilde{\vec{r}}\vec{r}$ $(\tilde{\vec{r}}={}^t\vec{r})$

$|\vec{r}'|^2=\tilde{\vec{r}}\tilde{R}R\vec{r}$ $(\tilde{R}R=E_3)$

$\tilde{R}=R^{-1}$… 直交行列

回転行列R:実の直交行列

特に無限小変換 δR

$R=1+\delta R=E_3+\delta R$ 無限小3×3行列

$\tilde{R}R=(\widetilde{E_3+\delta R})(E_3+\delta R)$

$=E_3+\widetilde{\delta R}+\delta R=E_3$

$\tilde{\delta R} = -\delta R$ ：反対称行列

∴ $(\delta R)_{ij} = -\epsilon_{ijk}\delta\omega_k$

$R: \psi \to \psi' = U\psi$ $\qquad R = 1+\delta R$

$\psi'(\vec r) = \psi(R^{-1}\vec r)$ $\qquad R^{-1} = 1-\delta R$

$= \psi((1-\delta R)\vec r)$

$= \psi(\vec r) - \delta R\vec r\cdot\vec\partial\psi(\vec r)$

$= \psi(\vec r) - (\delta R\vec r)_i\partial_i\psi(\vec r)$

$= \psi - (\delta R)_{ia} r_a\partial_i\psi$

$= \psi + \epsilon_{iak}\delta\omega_k r_a\partial_i\psi$

$= \psi - (\vec r\times\vec\partial)_k\delta\omega_k\psi$

$= \psi - \frac{i\cdot\delta\vec\omega\cdot(\vec r\times\vec p)}{\hbar}\psi$

$= e^{-i\delta\vec\omega\cdot\vec L/\hbar}\psi$ ($\vec L = \vec r\times\vec p$ 角運動量)

∴ $U = e^{-i\delta\vec\omega\cdot\vec L/\hbar}$

Hが回転操作で不変 → 角運動量保存

一般物理量 $\mathcal{O}$ $\qquad \mathcal{O}' = U\mathcal{O}U^\dagger$

$\delta\mathcal{O} = +i\delta\omega_i\cdot[\mathcal{O}, L_i]/\hbar$

$[r_i, L_j]$

$= [r_i, \epsilon_{jkl}r_k p_l]$

$= \epsilon_{jkl}[r_i, r_k]p_l + \epsilon_{jkl}r_k[r_i, p_l]$

$= \epsilon_{jkl}r_k\cdot i\hbar\delta_{il}$

$= i\hbar\epsilon_{ijk}r_k$

$[p_i, L_j]$

$= [p_i, \epsilon_{jkl}r_k p_l]$

$= \epsilon_{jkl}[p_i, r_k]p_l + \epsilon_{jkl}r_k[p_i, p_l]$

$= \epsilon_{jkl}(-i\hbar\delta_{ik})p_l$

$= i\hbar\epsilon_{ijk}p_k$

$[L_i, L_j]$

$= [\epsilon_{ikl}r_k p_l, L_j]$

$= \epsilon_{ikl}r_k[p_l, L_j]$

$+ \epsilon_{ikl}[r_k, L_j]p_l$

$= i\hbar(\epsilon_{ikl}\epsilon_{ljm}r_k p_m$ $\qquad -\epsilon_{ikl}\epsilon_{jkm}$

$+ \epsilon_{ikl}\epsilon_{kjm}r_m p_l)$

$= i\hbar(\epsilon_{imk}\epsilon_{kjl} + \epsilon_{ikl}\epsilon_{kjm})r_m p_l$

$= i\hbar(-\delta_{il}\delta_{mj} \cancel{+\delta_{ij}\delta_{ml}}$

$\cancel{-\delta_{ij}\delta_{lm}} + \delta_{im}\delta_{jl})r_m p_l$

$= i\hbar\epsilon_{ijk}\epsilon_{mlk}r_m p_l$

$= i\hbar\epsilon_{ijk}L_k$