

対称性の量子力学
→ 対称操作で不変な性質

波動関数 ψ の対称性を考える。
波関数 $\psi = H\psi$ に従う。

Dirac ブラケット記法
 $|\psi\rangle, \langle\psi|$

$\psi(x)$ $x \in \mathbb{R}$: 1次元の座標 x での波動関数
 $\psi(x)$: 位置ベクトル x での波動関数
(波動)関数

$x \in \mathbb{R} \rightarrow \psi(x) \in \mathbb{C}$

実数 → 複素数への写像

$\psi(x)$ は規格化されている。

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx |\psi(x)|^2 = 1$$

一般に波動関数 $f(x, y(x))$ の内積 (重なり積分)

$$\langle \psi, \phi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx \psi^*(x) \cdot \phi(x)$$

||

$\langle \psi | \phi \rangle$: 状態 $|\psi\rangle$ と $|\phi\rangle$ の重なり

$$\begin{aligned} \langle \psi | \phi \rangle^* &= \int_{-\infty}^{\infty} dx (\psi^*(x) \phi(x))^* \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dx \psi(x) \phi^*(x) \\ &= \langle \phi | \psi \rangle \end{aligned}$$

規格化 $\langle \psi | \psi \rangle = 1$

$$\psi(x) \longleftrightarrow |\psi\rangle$$

関数 状態ベクトル (ヒルベルト空間 n 元)

$\delta(x-a)$: デルタ関数

$$\delta(x-a) = \begin{cases} \infty & x=a \\ 0 & x \neq a \end{cases}$$

$$\delta(x-a) \longleftrightarrow |a\rangle$$

$$\langle a | \psi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx \delta(x-a) \psi(x) = \psi(a)$$

$$\langle a | \psi \rangle = \langle \psi | a \rangle^*$$

$\psi_n(x)$ ($n=1, 2, 3, \dots$) : 規格直交化された

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \psi_n^*(x) \psi_m(x) = \begin{cases} 1 & (n=m) \\ 0 & (n \neq m) \end{cases}$$

$$\langle \psi_n | \psi_m \rangle \equiv \delta_{nm}$$

左辺で右辺を定義する

$\{\psi_n(x)\}$: 完全規格直交列

任意の $\psi(x)$ は $\psi(x) = \sum_n c_n \psi_n(x)$ と展開できる

ex) 正三角形 120度回転操作で不変

→ 等辺三角形の辺 → 区別

△ と ☆ → 60度回転 → 対称性で区別

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \psi^*(x) \psi(x) = \sum_n c_n \int_{-\infty}^{\infty} dx \psi_n^*(x) \psi_n(x) = c_n$$

$$c_n = \int_{-\infty}^{\infty} dx \psi_n^*(x) \psi(x)$$

$$\psi(x) = \sum_n \psi_n(x) c_n = \int_{-\infty}^{\infty} dx \left[\sum_n \psi_n(x) \psi_n^*(x) \right] \psi(x)$$

$$\sum_n \psi_n(x) \psi_n^*(x) = \delta(x-x)$$

$\{\psi_n\}$ の完全性

bra-ket記法では $|\psi\rangle = \sum_n c_n |\psi_n\rangle$

$$\langle \psi_n | \psi \rangle = \sum_n c_n \langle \psi_n | \psi_n \rangle = c_n$$

$$|\psi\rangle = \sum_n |\psi_n\rangle c_n = \sum_n |\psi_n\rangle \langle \psi_n | \psi \rangle = \left(\sum_n |\psi_n\rangle \langle \psi_n| \right) |\psi\rangle = |\psi\rangle$$

$|\psi\rangle$ の物理量 θ の期待値 $\langle \psi | \theta | \psi \rangle$

$|\psi\rangle \rightarrow \theta |\psi\rangle$ 状態 (演算子) $|\psi\rangle = \theta |\psi\rangle$ の内積

同じ記号 θ を用いて $\psi(x) \rightarrow \theta \psi(x)$
量子力学の波動関数

$$|\theta \psi\rangle = \theta |\psi\rangle$$

$$\langle \psi | \theta | \psi \rangle = \langle \psi | \psi \rangle = 1$$

期待値

状態 $|\psi\rangle$ のエルミート演算子

演算子 A のエルミート共役演算子 A^* は?

$$\langle \psi | A \phi \rangle = \langle A^* \psi | \phi \rangle$$
 とできるもの

$$\langle \psi | A \phi \rangle^* = \langle A^* \psi | \phi \rangle^*$$

||

$$\langle A \psi | \phi \rangle = \langle \psi | A^* \phi \rangle$$

$$(A^*)^* = A$$

$A^* = A$ のエルミート演算子

状態 $|\psi\rangle$ の $\langle \psi | \psi \rangle = 1$

θ 物理量 θ のエルミート演算子で表現され θ の期待値 $\langle \psi | \theta | \psi \rangle$

$$R_{12}(\Delta) = \nabla \quad U|\psi\rangle = |\psi\rangle \quad U: \text{対称操作}$$

$$\langle \psi | \psi \rangle = 1$$

$$|\psi\rangle \in \langle \psi | \psi \rangle = 1$$

$$\langle \psi | = \langle \psi | U^\dagger \in \langle \psi | \psi \rangle$$

$$\langle \psi | \psi \rangle = \langle \psi | U^\dagger U | \psi \rangle = 1$$

$$U^\dagger U = 1$$

$U^\dagger U = 1$ の $U^\dagger$ は U の逆演算子

対称操作 U はユニタリ性がある

$$U : |\psi\rangle \rightarrow U|\psi\rangle = U|\psi\rangle$$

$$U : \theta \rightarrow \theta'$$

$$\langle \psi | \theta | \psi \rangle = \langle \psi | \theta' | \psi \rangle$$
 とできるから

$$\langle \psi | \theta | \psi \rangle = \langle \psi | U^\dagger \theta U | \psi \rangle$$

$$\theta = U^\dagger \theta U$$

$\theta' = U^\dagger \theta U$ は物理量 θ の変換である

$$|\psi\rangle \rightarrow U|\psi\rangle = U|\psi\rangle$$

$$\theta \rightarrow \theta' = U^\dagger \theta U$$

物理量 θ の変換で不変な $\theta = \theta'$

