4/15 #1 対称性の量子力学. [redacted]

対称性 とは?

→ 対称ソウサ で 不変な性質.
operation invariant

ex) 正三角形

$120°$回転 $:= R_{\frac{2\pi}{3}}$
について 不変. ← 二等辺三角形  では 不変でない

対称ソウサにより ↑ → と区別できる.

回転ソウサの例. G,

$G(\triangle) = \{\frac{2n}{3}\pi \ (n=0,1,2\cdots)\}$

$G(✡) = \{\frac{n}{3}\pi \ (n=0,1,2\cdots)\}$ ∩ 対称性 による 高低の比較.

波動関数 ψ の 対称性 を考える. (量子力学II の目標)

$\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ (一次元)

$x \mapsto \psi(x)$

$\int_{-\infty}^{\infty} dx |\psi(x)|^2 = 1$ (規格化) ⇝ $\langle\psi|\psi\rangle = 1$

ψ と φ の内積

$\mathbb{C} \ni \langle\varphi|\psi\rangle := \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \varphi^*(x)\psi(x)$

$\langle\varphi|\psi\rangle^* = \int_{-\infty}^{\infty} dx \left(\varphi^*(x)\psi(x)\right)^*$

$= \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \psi^*(x)\varphi(x)$

$= \langle\psi|\varphi\rangle$

$\psi(x) \longleftrightarrow |\psi\rangle$ ← 波動関数 が満たしておいてほしい
function Hilbert sp. 上の元 代数 を 表現できる 別の"空間"への対応
(状態 vec)

デルタ関数. $\delta(x-a) = \begin{cases} \infty & (x=a) \\ 0 & (x\neq a) \end{cases}$

$\delta(x-a) \longleftrightarrow |a\rangle$ (位置演算子の固有ket)

$\langle a|\psi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \delta^*(x-a)\psi(x)$

$= \psi(a)$

⇝ $\psi(x) = \langle x|\psi\rangle$ と書ける.

$\{\psi_n(x)\}_n$ が 規格直交化されてる. $(n\in\mathbb{N})$

$\underset{def}{\iff} \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \psi_n^*(x)\psi_m(x) = \begin{cases} 1 & (n=m) \\ 0 & (n\neq m) \end{cases}$

規格直交列

$\langle\psi_n|\psi_m\rangle := \langle n|m\rangle = \delta_{nm}$ ⇔ $\{|\psi_n\rangle\}_n$ が 規格直交化されている.

$\{\psi_n(x)\}_{n=1,2\cdots}$ が complete

$\underset{def}{\iff} \forall \varphi(x).\ \varphi(x) = \sum_n c_n\psi_n(x)$ $(c_n \in \mathbb{C})$

あるmについて

$$\int_{-\infty}^{\infty} dy\, \psi_m^*(y)\varphi(y) = \int_{-\infty}^{\infty}\psi_m^*(y)\left(\sum_n c_n\psi_n(y)\right)$$

$$= \sum_n c_n \int_{-\infty}^{\infty}\psi_m^*(y)\psi_n(y)$$

$$= \sum_n c_n\delta_{mn}$$

$$= c_m$$

$$\varphi(x) = \sum_n \psi_n(x) c_n$$

$$= \int dy \underbrace{\left[\sum_n \psi_n(x)\psi^*(y)\right]}_{\delta(x-y)} \varphi(y)$$

$\{\psi_n(x)\}$の完全性

$$\delta(x-y) = \sum_n \psi_n(x)\psi^*(y)$$

bra-ket 記法では

$$|\varphi\rangle = \sum_n c_n|\psi_n\rangle$$

$$\langle\psi_m|\varphi\rangle = \sum_n c_n \underbrace{\langle\psi_m|\psi_n\rangle}_{\delta_{mn}} = c_m \iff \{|\psi_n\rangle\}_n \text{ が complete.}$$

$$|\varphi\rangle = \sum_n |\psi_n\rangle c_n$$

$$\leadsto = \sum_n |\psi_n\rangle\cdot\langle\psi_n|\varphi\rangle = \left(\sum_n |\psi_n\rangle\langle\psi_n|\right)|\varphi\rangle \leadsto \left(\sum_n |\psi_n\rangle\langle\psi_n|\right) = I.$$

Hilbert sp. における恒等演算子.

$|\psi\rangle$の時の物理量 Θの期待値.

$\langle\psi|\Theta\psi\rangle$

Θ : Hilbert sp. → Hilbert sp.

$|\psi\rangle \mapsto \Theta|\psi\rangle$

operator

$\Theta|\psi\rangle = |\psi'\rangle$ とすると.

$$\langle\psi|\Theta|\psi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \psi^*(x)\psi'(x)$$

$|\Theta\psi\rangle = \Theta|\psi\rangle$

$\langle\psi|\Theta|\psi\rangle$: Θの期待値 (ただし $\langle\psi|\psi\rangle = 1$)

また、Θは hermite

A : operator $A^\dagger$: Aの conj.

→ $\forall |\psi\rangle, |\varphi\rangle$

$$\langle\varphi|A\psi\rangle = \langle A^\dagger\varphi|\psi\rangle$$

$$\langle\varphi|A\psi\rangle^* = \langle A^\dagger\varphi|\psi\rangle^*$$

$$\langle A\psi|\varphi\rangle = \langle\psi|A^\dagger\varphi\rangle$$

$$\leadsto (A^\dagger)^\dagger = A$$

$A^\dagger$: Aの Hermite op.

状態$|\psi\rangle$. $\langle\psi|\psi\rangle = 1$

物理量Θは Hermite op. で表現され、その期待値は $\langle\psi|\Theta|\psi\rangle$

$\Theta^\dagger = \Theta$

$|\psi\rangle$に対する対称ソウサT

$$T|\psi\rangle = |\psi'\rangle$$

($\langle\psi|\psi\rangle = 1$ のとき
$\langle\psi'|\psi'\rangle = 1$ である) としたい

$$\langle\psi'| = \langle\psi|U^\dagger$$
$$= (U|\psi\rangle)^\dagger$$
$$\langle\psi'|\psi'\rangle = (U|\psi\rangle)^\dagger|\psi'\rangle$$
$$= \langle\psi|U^\dagger U|\psi\rangle$$
$$= 1 \quad (U^\dagger U = 1\ (id?)\ なら)$$

<u>対称性 U についての条件</u>

U について $U^\dagger U = 1$, $U^{-1} = U^\dagger$

つまり U は ユニタリ op.

$$U : |\psi\rangle \longmapsto |\psi'\rangle := U|\psi\rangle$$
$$:= |U\psi\rangle$$
$$\mathcal{O} \longmapsto \mathcal{O}'$$

$\left(\langle\psi|\mathcal{O}|\psi\rangle = \langle\psi'|\mathcal{O}'|\psi'\rangle \right)$ としたい

$$\langle\psi|\mathcal{O}|\psi\rangle = \langle\psi|U^\dagger\mathcal{O}'U|\psi\rangle$$
$$\rightsquigarrow \mathcal{O} = U^\dagger\mathcal{O}'U$$

<u>対称性 U についての条件</u>

$\mathcal{O}' = U\mathcal{O}U^\dagger$ と変換させる.

$$U : |\psi\rangle \longmapsto |U\psi\rangle$$
$$\mathcal{O} \longmapsto U\mathcal{O}U^\dagger$$

Uはユニタリ

$$\begin{tikzcd}
|\alpha\rangle \arrow[loop above, "id_{|\alpha\rangle}"] \arrow[d, "\mathcal{O}_1"] \arrow[dd, bend right, "\mathcal{O}_2\circ\mathcal{O}_1"'] & & |\alpha'\rangle \arrow[loop above, "id_{|\alpha'\rangle}"] \arrow[d, "U\mathcal{O}_1U^\dagger"] \arrow[dd, bend right] \\
|\beta\rangle \arrow[d, "\mathcal{O}_2"] \arrow[rr, phantom, "\overset{U}{\longmapsto}"] & & |\beta'\rangle \arrow[d, "U\mathcal{O}_2U^\dagger"] \\
|\gamma\rangle & & |\gamma'\rangle
\end{tikzcd}$$

$U(\mathcal{O}_2\circ\mathcal{O}_1)U^\dagger$

同型

物理量 $\mathcal{O}$ が この変換で不変とは,

$$\mathcal{O} = \mathcal{O}'$$
$$\Leftrightarrow U\mathcal{O}U^\dagger = \mathcal{O}$$
$$\Leftrightarrow U\mathcal{O} = \mathcal{O}U$$
$$\Leftrightarrow [U, \mathcal{O}] = 0$$

$\Leftrightarrow$ U と $\mathcal{O}$ は交換する

特に 変換の中で 連続変換 (なにもしない変換に 連続的 につながっているもの)

無限小変換

$$U = e^{i\underbrace{\delta\lambda}_{}G/\hbar} \qquad 無限小のパラメータ$$
$$\simeq 1 + i\delta\lambda G/\hbar + \mathcal{O}(\delta\lambda^2)$$

$$U = 1 + i\delta\lambda G/\hbar$$
$$[1 + i\delta\lambda G/\hbar, \mathcal{O}]$$
$$= (i\delta\lambda/\hbar)[G, \mathcal{O}]$$
$$= 0$$

$\mathcal{O}$ が U について不変なら

$\mathcal{O}$ が 無限小変換 $e^{i\delta\lambda G/\hbar}$ で不変

$$[\mathcal{O}, G] = 0$$