

— 量子ホール効果 —

その意義と幾何学および代数的構造

東京大学大学院工学系研究科 物理工学 初貝 安弘¹

目次

1	講義の概要 (予定)	3
2	量子ホール効果と磁場中の電子系	5
2.1	量子ホール効果とは	5
2.2	磁場中の電子系	5
2.3	格子上磁場下の電子系	9
3	ホール伝導度とそのトポロジカルな意義	17
3.1	無限系 (バルク) におけるホール伝導度のトポロジカルな意味— 渦度、チャーン数 —	17
3.1.1	断熱近似による TKNN 公式の導出	18
3.1.2	チャーン数と渦度、ディラックモノポールとのアナロジー	23
3.2	境界のある系でのゲージ不変性による Laughlin の議論	30
3.3	境界を持つ系におけるホール伝導度のトポロジカルな意味— リーマン面上でのエッジ状態の回転数と交点数 —[18]	31
3.3.1	転送行列とエッジ状態	33
3.3.2	転送行列とバルク状態	35
3.3.3	リーマン面上のエッジ状態	39
3.3.4	リーマン面上の回転数、交点数と Laughlin の議論	40
3.4	2つの位相不変量: — バルクかエッジか —	48
4	分数と整数	51
4.1	Berry Phase	51
4.2	分数統計粒子	53
4.3	磁束の切り張り (Composite Fermion, 1/2 Fermi Liquid 状態, Anyon 超伝導...)	54
4.4	もう一つの分数統計, 排他的分数統計	57
4.5	排他的分数統計と量子ホール効果	60
5	量子相転移と Dirac Fermion	62
5.1	量子相転移と (隠れた) ディラックフェルミオン	62
5.2	ランダム系における位相不変量の意義、ゼロモード、非局在状態のフローティング等、最近の話題	73
5.3	時間反転対称性を破る超伝導とスピンホール伝導度の量子化、束縛状態、双対性	73

¹hatsugai@pothos.t.u-tokyo.ac.jp, http://pothos.t.u-tokyo.ac.jp/summer_school/ v1.05 最終変更 2001. 8.01

6 磁場中の電子系における幾何学的位相と量子群	76
6.1 イントロダクション	76
6.2 量子群といくつかの表現	78
6.3 ブロッセ電子に対するベータ方程式	81
6.4 ベータ方程式のあらわな解	81
7 終わりに	90

量子ホール効果に関してはその現象の発見に対して Klitzing(1982 年) にノーベル賞が与えられ [1]、この現象において存在すると考えられている分数電荷の発見に対して Tsui, Störmer, Laughlin (1998 年) に再びノーベル賞が与えられています。賞による評価がすべてというわけではありませんが、この現象の現在の物性物理における意義の大きさがある程度、象徴しているといえるでしょう。量子ホール効果は磁場中の 2 次元電子系でおきる現象です。この系においては後で述べます幾何学的位相とよばれる量子力学的な位相が本質的な役割を果たします。また、分数量子ホール効果は運動エネルギーに比べて電子間の相互作用エネルギーが極めて大きいいわゆる強相関の問題の典型例です。振り返ると量子ホール効果は現在の物性物理の重要な問題である「幾何学的位相」と「強相関効果」の主な舞台であり、事実ここで得られた手法は他の問題へ適用され新しい知見を産みつつあるわけです。

この現象を中心としてその固体物理における重要性が理解できるような講義をしたいと思います。また量子ホール効果の舞台となる磁場中の 2 次元電子系は講義で議論するように現代的な幾何学的、数学的構造、代数的構造を含んでおりその面からも極めて興味深い対象となっています。この数学的な構造についても理解して頂ける講義としたいと思います。電子系の基本的かつ 普遍的現象としての 量子ホール効果に関連して、しっかりわかってきたこと 及びその研究の過程で生まれてきたアイデア をできるだけ自己完結する見方でお話したいとおもいます。特に量子ホール効果については「通常の固体物理的側面」からの解説はすでに多く存在するのでできるだけ特徴あるものとなればと考えています。

なお本文中脚注番号がついている部分については導出その他の部分で講義では説明する予定です。自分で埋めてみてください。また参考文献は最低限のものを多少の参考となることを期待してのせています。原論文で引用しているようにここでの議論は多くの人々の結果によるところが多であることはいうまでもありません。ここで関係の方々に感謝したいとおもいます。ただし時間の関係で参考文献リストは最小限かつランダムなものとなっていることを了解していただきたいとおもいます。

1 講義の概要 (予定)

1. 整数量子ホール効果とは

- 磁場中の電子系についての基礎的な事柄
- 幾何学的位相としての Berry Phase
- Laughlin のゲージ不変性の議論

量子ホール効果についての極めて明解かつ本質的な議論を紹介します。

物理現象においては境界は副次的な重要性しか持たないと思いがちですが近年の物理においてはそこに本質的な重要性がある場合が多々あります。量子ホール効果においては境界 (エッジ) の存在が重要です。

- 境界を持たない系におけるホール伝導度のトポロジカルな意味 (TKNN)
無限大の系、もしくは周期的境界条件を課した系におけるホール伝導度は Chern 数と呼ばれる符号付きの整数で表せる渦度の総和として記述できることを示します。
- 境界のある系におけるホール伝導度のトポロジカルな意味
一方向に境界を持つ系 (シリンダー) 状の系におけるホール伝導度は複素エネルギー面としてのリーマン面上でのある種の回転数もしくは閉曲線の交点数として記述できることを示します。
- 2つの幾何学的量の間関係、バルクかエッジか
上記の2つの幾何学的な整数の間関係を議論します。その結果2つの記述が同値であることを示します。

2. 分数量子ホール効果とその周辺

- ホール伝導度の分数量子化と分数電荷、分数統計 (Anyon)、排他的分数統計
ホール伝導度の分数量子化は分数電荷の存在と基底状態の縮退を意味します。さらにこの系で議論される2種類の分数統計である Anyon と排他的分数統計についても議論したいと思います。
- Composite Fermion (Jain) と 磁束の切り貼り、Adiabatic Heuristic Argument (Wilczek)
分数量子ホール効果においては Jain が最初に提案した電子と磁束の複合粒子 (Composite Fermion) が基本粒子と考えられます。これを概念的に断熱的接続の考え方に基づいて拡張したものが Wilczek 等が提案した Adiabatic Heuristic です。これらについて フェルミ液体と考えられる $1/偶数$ 状態等をふくめて議論します。

3. 量子相転移との関連

- 量子相転移としての量子ホール状態間の転移と選択則、Dirac Fermion
ホール伝導度に変化する転移は、基底状態の相転移である量子相転移の典型例と考えられます。これに関してその選択則、ならびに転移を支配する質量を持つ Dirac Fermion の関連を議論します。
- 時間反転対称性をやぶる超伝導体への応用と量子相転移、Duality
量子ホール効果において初めて議論された上記のトポロジカルな性質は実は他の物理現象においてもほぼ並行に議論できるものがいくつもあることが最近分かってきました。

その最も初期かつ重要な例として時間反転対称性を破る超伝導体における応用について議論します。

- ランダム系との関連、ホール絶縁体

時間があればトポロジカルな議論がランダム系における諸問題をいかに拘束し、また有用な情報を与えるかを議論します。

4. 磁場下の粒子の量子力学と代数的構造

- 磁場下での並進操作の非可換性と量子群

量子力学においては波動関数の位相の重要性が、Berry により幾何学的位相として指摘され、その後の種々の問題においてその概念の有効性が示されてきています。特に、磁場の存在下では荷電粒子を量子力学的に移動させる際に得る幾何学的位相は、アハロノフ・ボーム効果として知られ、移動の始点と終点だけでなくその履歴に依存することになり、その直接の帰結として並進操作に非可換性をもたらします。Wiegmann-Zabrodin はこの非可換性と数学的にも新しい非可換性を持つ概念である量子群とのあいだに具体的な関連があることを発見しそこに可解模型と同様の構造の存在することを指摘しました。この関連を説明し、その後のいくつかの展開を紹介したいと思います。

- (マルチ) フラクタル、自己相似性に関する解析的な議論

磁場中の問題とフラクタル構造の関係としては有名な Hofstadter のバタフライの図等がありますが、上記の議論の面白い直接の帰結として例えば複素平面上でその根がマルチフラクタルに分布する方程式、等が得られます。

2 量子ホール効果と磁場中の電子系

2.1 量子ホール効果とは

量子ホール効果 [1, 2, 3, ?, 4, 5] とは文字どおりホール伝導度が量子化される現象でその実験的発見に対して K.V.Klitzing にノーベル賞があたえられています。驚くべきはその精度でそれが6桁以上の精度を持つというのです。伝導度ですから電流/電圧なわけで電流と電圧をはかってみれば例えば $34.51231 / 17.25616 = 1.999999\dots$ 、 $67.88631 / 22.62876 = 3.000001$ となったら「これは普通でないなんかがある」、というわけです。こんなぐあいに整数の値にホール伝導度が極めて近くなる現象を 整数量子ホール効果といい、ある場合には、この値が $14.512 / 43.535 = 0.3333\dots$ 等と整数/奇数に極めて近くなることを分数量子ホール効果といいます。この現象の特異なところは、結果がとてもきれいな数になるので一見して何かの物理量を摂動論とか $\circ \times$ 近似で計算するという定量的な議論では不十分だと感じるわけです。つまりこの現象は、何らかの形で整数がらみの理論がその裏にあることを示唆していると思いませんか。そして実際、量子ホール効果とは系の細部に依存しない境界が何個あるか、どんなぐあいに繋がってるかといった物理系の位相的性質にのみ依存した形で理論としてきれいにまとめ、それが ある意味で現実にも実験として観測にかかっている (と信じられている) 非常にまれな現象なのです。

2.2 磁場中の電子系

最初に一様磁場 \vec{B} 中の粒子の量子力学について復習しよう [9]。

まず、古典的なローレンツ力に従う電子 (電荷 $-e$) のニュートン方程式を導くハミルトニアンが次のものであることに注意して

$$H = \frac{1}{2m} \left(\vec{p} + \frac{e}{c} \vec{A} \right)^2$$

(量子力学における) ハミルトニアンとしてつぎのものをとろう。

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2m} \vec{\Pi}^2 \\ \vec{\Pi} &= -i\hbar \vec{\nabla} + \frac{e}{c} \vec{A} \\ \vec{B} &= \text{rot } \vec{A} \end{aligned}$$

ここで磁場を z 方向にとって

$$H = \frac{1}{2m} (\hat{z} \times \vec{\Pi})^2 = \frac{1}{2m} (\Pi_x^2 + \Pi_y^2)$$

とする。² ここで $\vec{\Pi}$ の成分間の交換子を計算すると³

$$\left[\frac{\ell_B}{\hbar} \Pi_x, \frac{\ell_B}{\hbar} \Pi_y \right] = -i$$

² $\epsilon_{ijk} \partial_j A_k = (\hat{z})_i B$
³

$$\begin{aligned} [\Pi_i, \Pi_j] &= [-i\hbar \partial_i + \frac{e}{c} A_i, -i\hbar \partial_j + \frac{e}{c} A_j] = -i \frac{e\hbar}{c} \left([\partial_i, A_j] + [A_i, \partial_j] \right) \\ &= -i \frac{e\hbar}{c} \left(\partial_i A_j - \partial_j A_i \right) \end{aligned}$$

$$[\Pi_x, \Pi_y] = -i \frac{e\hbar}{c} B = -i \left(\frac{\hbar}{\ell_B} \right)^2, \quad \ell_B = \sqrt{\frac{\hbar c}{eB}}$$

ここで

$$\ell_B = \sqrt{\frac{\hbar c}{eB}}$$

は長さの次元を持つ量で磁気長と呼ばれる。この交換関係より

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\ell_B}{\hbar} (\Pi_y + i\Pi_x)$$

として演算子 a を定義すれば $[a, a^\dagger] = 1$ であり、⁴ ハミルトニアンは⁵

$$H = \hbar\omega_c \left(n_a + \frac{1}{2} \right), \quad n_a = a^\dagger a$$

$$\omega_c = \frac{eB}{mc} : \text{サイクロトロン周波数}$$

と書ける。これは1つの調和振動子のハミルトニアンである。

一方

$$R_x = x - \frac{\ell^2}{\hbar} \Pi_y$$

$$R_y = y + \frac{\ell^2}{\hbar} \Pi_x$$

を定義するとこれらはハミルトニアンと可換であり⁶

$$[H, R_x] = [H, R_y] = 0$$

4

$$[a, a^\dagger] = \frac{\ell_B^2}{2\hbar^2} \left([\Pi_y, -i\Pi_x] + [i\Pi_x, \Pi_y] \right) = 1$$

5

$$\Pi_x = \frac{\hbar}{\ell_B} \frac{1}{i\sqrt{2}} (a - a^\dagger)$$

$$\Pi_y = \frac{\hbar}{\ell_B} \frac{1}{\sqrt{2}} (a + a^\dagger)$$

より

$$H = \frac{1}{2m} \frac{\hbar^2}{2\ell_B^2} \left(-(a - a^\dagger)^2 + (a + a^\dagger)^2 \right) = \frac{1}{2m} \frac{\hbar^2}{\ell_B^2} (aa^\dagger + a^\dagger a)$$

$$= \hbar\omega_c \left(a^\dagger a + \frac{1}{2} \right)$$

$$\omega_c = \frac{\hbar}{m\ell_B^2} = \frac{eB}{mc}$$

⁶ まず $[x, \Pi_x] = [y, \Pi_y] = i\hbar$, $[x, \Pi_y] = [y, \Pi_x] = 0$ よって

$$[\Pi_x, R_x] = \left[\Pi_x, x - \frac{\ell^2}{\hbar} \Pi_y \right] = -i\hbar - \hbar(-i) = 0$$

$$[\Pi_x, R_y] = \left[\Pi_x, y + \frac{\ell^2}{\hbar} \Pi_x \right] = 0$$

$$[\Pi_y, R_x] = \left[\Pi_y, x - \frac{\ell^2}{\hbar} \Pi_y \right] = 0$$

$$[\Pi_y, R_y] = \left[\Pi_y, y + \frac{\ell^2}{\hbar} \Pi_x \right] = -i\hbar + \hbar(i) = 0$$

運動の定数となる。⁷

よって観測量となるエルミート演算子 R_x または R_y がハミルトニアンと可換となり、一つのエネルギー状態は異なる量子数を持つことを意味する。すなわち各エネルギーは縮退していることとなる。この縮退をランダウ縮退という。(特に系の大きさが ℓ_B を単位にマクロな系ではこの縮退度はマクロなものとなる。)

さらに磁気並進演算子 $T(\vec{\lambda})$ を

$$T_x(\vec{\lambda}) = e^{\frac{i}{\hbar} \vec{\lambda} \cdot \vec{\Pi}}$$

とすれば⁸

$$T(a\hat{x})^{-1}T(b\hat{y})^{-1}T(a\hat{x})T(b\hat{y}) = e^{2\pi \frac{\text{囲む面積} \times B}{\Phi_0}}$$

すなわち並進操作により閉じた曲線を動くときに得る位相は囲む面積あたりの磁束を磁束単位で計ったもの ($\times 2\pi$) となることに注意しておこう [10]。

以下有名な2つのゲージについて少し議論しよう。

- ランダウゲージ

$$\vec{A} = B(0, x, 0)$$

7

$$\begin{aligned} [R_x, R_y] &= [x - \frac{\ell^2}{\hbar} \Pi_y, y + \frac{\ell^2}{\hbar} \Pi_x] \\ &= \frac{\ell^2}{\hbar} ([x, \Pi_x] - [\Pi_y, y]) - \left(\frac{\ell^2}{\hbar}\right)^2 [\Pi_y, \Pi_x] = \frac{\ell^2}{\hbar} 2i\hbar - \frac{\ell^4}{\hbar^2} i \frac{\hbar^2}{\ell_B^2} \\ &= i\ell_B^2 \end{aligned}$$

$$\left[\frac{R_x}{\ell_B}, \frac{R_y}{\ell_B} \right] = i$$

よって

$$b = \frac{1}{\ell_B} \frac{1}{\sqrt{2}} (R_x + iR_y)$$

とすると

$$[b, b^\dagger] = \frac{1}{2\ell_B^2} ([R_x, -iR_y] - [iR_y, R_x]) = 1$$

さらに

$$\begin{aligned} n_b &= \frac{1}{2\ell_B} (R_x - iR_y)(R_x + iR_y) = \frac{1}{2\ell_B} (R_x^2 + R_y^2 + i[R_x, R_y] - i[R_y, R_x]) \\ &= \frac{R_x^2 + R_y^2}{2\ell_B} - 1 \end{aligned}$$

$$R^2 \equiv R_x^2 + R_y^2 = 2\ell_b^2(n_b + 1)$$

$$n_b = b^\dagger b$$

⁸ $[A, B] = \text{定数のとき } e^A e^B = e^{[A, B]} e^B e^A$ を使って

$$\begin{aligned} T(a\hat{x})T(b\hat{y}) &= e^{-ab \frac{1}{\hbar^2} [\Pi_x, \Pi_y]} T(b\hat{y})T(a\hat{x}) \\ -ab\hbar^2 [\Pi_x, \Pi_y] &= iab \frac{1}{\ell_B^2} \\ &= 2\pi i \frac{abB}{\Phi_0} \end{aligned}$$

としよう。このとき最低エネルギー状態状態 (最低ランダウ準位) は $a|\psi\rangle = 0$ を満たすから⁹

$$\begin{aligned}\psi(x, y) &= e^{-ik_y y - \frac{(x - \ell_B^2 k_y)^2}{2\ell_B^2}} \\ R_y \psi &= \ell_B^2 k_y \psi\end{aligned}$$

となり、異なる

$$R_y b = \ell_B^2 k_y$$

の状態が縮退した状態を与えることとなる。これらは x 方向には $\ell_B^2 k_y$ に局在した波動関数となる。ここで全系が $L_x \times L_y$ の有限系とし、 y 方向には周期的であり、 x 方向には $0 < R_y < L_x$ のもののみ許されるとすればその縮退度 N_ϕ は

$$\begin{aligned}N_\phi &= \frac{k_y^{max}}{\Delta k_y} = \frac{L_x / \ell_B^2}{2\pi / L_y} \\ &= \frac{L_x L_y}{2\pi \ell_B^2} = \frac{L_x L_y}{2\pi \frac{\hbar c}{eB}} \\ &= \frac{BS}{\Phi_0}\end{aligned}$$

となる。ここで $S = L_x L_y$ は全面積

$$\Phi_0 = \frac{hc}{e}$$

は磁束単位とよばれる。すなわちランダウ準位の縮退度は系を貫く全磁束を磁束単位で計ったものとなる。

- 対称ゲージ

$$\vec{A} = \frac{1}{2}B(-y, x, 0)$$

9

$$\Pi_x = -i\hbar\partial_x, \quad \Pi_y = -i\hbar\partial_y + \frac{eB}{c}x = \hbar(-i\partial_x + \frac{x}{\ell_B^2})$$

$$R_x = x - \frac{\ell_B^2}{\hbar}\Pi_y = x - \ell_B^2(-i\partial_y + \frac{x}{\ell_B^2}) = i\ell_B^2\partial_y$$

$$a = \frac{\ell_B}{\sqrt{2\hbar}}(\Pi_y + i\Pi_x) = \ell_B(-i\partial_y + \frac{x}{\ell_B^2} + \partial_x)$$

$$(-i\partial_y + \frac{x}{\ell_B^2} + \partial_x)\psi = 0$$

より $\psi(x, y) = e^{-ik_y y} f(x)$ として

$$f' - (k_y - \frac{x}{\ell_B^2})f = 0$$

$$f(x) = e^{-\frac{1}{2}(\frac{x}{\ell_B^2} - k_y)^2}$$

$$\psi(x, y) = e^{-ik_y y} e^{-\frac{(x - \ell_B^2 k_y)^2}{2\ell_B^2}}$$

とすると¹⁰ $a|\psi\rangle = (\Pi_y + i\Pi_x)|\psi\rangle = 0$ より $(\partial_{\bar{z}} + \frac{z}{4e\ell_B^2})\psi = 0$ から

$$\psi(z, \bar{z}) = P(z) e^{-\frac{|z|^2}{4\ell_B^2}}$$

となり $P(z)$ の選び方でランダウ縮退が生じる。¹¹

2.3 格子上磁場下の電子系

次に格子間隔を a とした格子上で磁場中の電子系を議論したい。[11, 12, 13, 14, 15, 18] 以下わかるようにこのように格子上で議論を行うことにより境界条件、状態の数え上げ等が簡単になる。また通常の連続空間での議論も適当なスケール極限 ($a \rightarrow 0$) の下で再現する [21]。

10

$$\begin{aligned}\Pi_x &= -i\hbar\partial_x - \frac{1}{2}\frac{y}{\ell_B^2} = \hbar(-i\partial_x - \frac{1}{2}\frac{y}{\ell + B^2}) \\ \Pi_y &= -i\hbar\partial_y + \frac{1}{2}\frac{x}{\ell_B^2} = \hbar(-i\partial_y + \frac{1}{2}\frac{x}{\ell + B^2}) \\ \Pi_y + i\Pi_x &= \hbar(-i\partial_y + \frac{1}{2}\frac{x}{\ell + B^2} + \partial_x - i\frac{1}{2}\frac{y}{\ell + B^2}) = \hbar\left((\partial_x - i\partial_y) + \frac{1}{2\ell_B^2}(x - iy)\right) \\ &= \hbar\left(2\partial_{\bar{z}} + \frac{z}{2e\ell_B^2}\right)\end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned}z &= x - iy, \quad \bar{z} = x + iy \\ x &= \frac{1}{2}(z + \bar{z}), \quad y = \frac{1}{-2i}(z - \bar{z}) \\ \partial_{\bar{z}} &= \frac{\partial x}{\partial \bar{z}}\partial_x + \frac{\partial y}{\partial \bar{z}}\partial_y = \frac{1}{2}(\partial_x - i\partial_y) \\ \partial_z &= \frac{\partial x}{\partial z}\partial_x + \frac{\partial y}{\partial z}\partial_y = \frac{1}{2}(\partial_x + i\partial_y)\end{aligned}$$

11

$$\begin{aligned}b &= \frac{1}{\sqrt{2}\ell_B}(R_x + iR_y) = \frac{1}{\sqrt{2}\ell_B}\left(x - \frac{\ell_B^2}{\hbar}\Pi_y + i\left(y + \frac{\ell_B^2}{\hbar}\Pi_x\right)\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{(x + iy)}{\ell_B} - \frac{\ell_B}{\hbar}(\Pi_y - i\Pi_x)\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{(x + iy)}{\ell_B} - \frac{\ell_B}{\hbar}(i\partial_y + \frac{1}{2}\frac{\hbar}{\ell_B^2}x + \partial_x + i\frac{1}{2}\frac{\hbar}{\ell_B^2}y)\right) \\ &= 2\ell_B\left(\frac{\bar{z}}{4\ell_B^2} - \partial_z\right)\end{aligned}$$

より $b|\psi\rangle = 0$ とすると

$$\psi = \text{定数} \times e^{-\frac{|z|^2}{4\ell_B^2}}$$

この状態に対して

$$\begin{aligned}b^\dagger &= \frac{1}{\sqrt{2}\ell_B}(R_x - iR_y) = \frac{1}{\sqrt{2}\ell_B}\left(x - \frac{\ell_B^2}{\hbar}\Pi_y - i\left(y + \frac{\ell_B^2}{\hbar}\Pi_x\right)\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{(x - iy)}{\ell_B} - \frac{\ell_B}{\hbar}(\Pi_y + i\Pi_x)\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{(x - iy)}{\ell_B} - \frac{\ell_B}{\hbar}(i\partial_y + \frac{1}{2}\frac{\hbar}{\ell_B^2}x - \partial_x - i\frac{1}{2}\frac{\hbar}{\ell_B^2}y)\right) \\ &= 2\ell_B\left(\frac{z}{4\ell_B^2} - \partial_{\bar{z}}\right)\end{aligned}$$

の作用は

$$b^\dagger|\psi\rangle = z|\psi\rangle$$

となる。

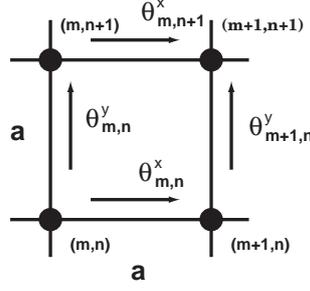


図 1: リンクに割り当てる位相とプラケットあたりの磁束

まず、第二量子化した表示で次のハミルトニアンを考える。

$$H = -t \sum_{\langle ij \rangle} (c_i^\dagger e^{i\theta_{ij}} c_j + h.c.) + V(\{n_k\})$$

ここで c_i は 2次元格子上 i サイトの電子の消滅演算子で $\{c_i, c_j^\dagger\} = \delta_{ij}$ 、 V は電子の粒子数 (演算子) $n_k = c_k^\dagger c_k$ により書ける項で乱れのポテンシャル及び、電子間相互作用はこの項に含まれるが、以下当面のところ相互作用も乱れもない $V = 0$ の場合を考えよう。 θ_{ij} は j サイトから i サイトに電子が飛び移るとき受ける位相の変化でベクトルポテンシャル $\vec{A}(\vec{r})$ と次のように関係するものとする。

$$\theta_{ij} = -\frac{e}{c\hbar} \int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_j} d\vec{r} \vec{A}(\vec{r}) = -2\pi \frac{1}{\Phi_0} \int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_j} d\vec{r} \vec{A}(\vec{r}), \quad \Phi_0 = \frac{hc}{e}$$

なお Φ_0 は磁束単位と呼ばれる。これが磁気並進演算子 T_x, T_y を使って以下のように書けることにまず注意しよう。

$$\begin{aligned} H &= H_0 + V \\ H_0 &= -t(T_x + T_x^\dagger + T_y + T_y^\dagger) \\ T_x &= \sum_{m,n} c_{m+1,n}^\dagger e^{i\theta_{m,n}^x} c_{m,n} \\ T_y &= \sum_{m,n} c_{m,n+1}^\dagger e^{i\theta_{m,n}^y} c_{m,n} \end{aligned}$$

特に位相を図 1 のようにとった場合

$$\begin{aligned} \theta_{m,n}^x &= \frac{e}{c\hbar} a A_x(m + \frac{1}{2}, n) + o(a) \\ \theta_{m,n}^y &= \frac{e}{c\hbar} a A_y(m, n + \frac{1}{2}) + o(a) \end{aligned}$$

となり

$$\sum_{\text{Plaquette } P=(m+\frac{1}{2}, n+\frac{1}{2})} \theta = \theta_{m,n}^x + \theta_{m+1,n}^y - \theta_{m,n+1}^x - \theta_{m,n}^y = 2\pi\phi_{P=(m+\frac{1}{2}, n+\frac{1}{2})}$$

と定めると a について展開して a について最低次で

$$\phi_P = -\frac{e}{2\pi c\hbar} a^2 (\partial_x A_y - \partial_y A_x) = -\frac{Ba^2}{\Phi_0}$$

となる。これから物理量 ϕ_P はプラケット P での xy 2次元平面に垂直な磁束を磁束量子 Φ_0 を単位として計ったものと考えよう ($\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$)。

この格子系の系は $\{\varphi_i\}$ を任意として次のようなユニタリ変換 (局所ゲージ変換) で不変であることに注意しよう。

$$\begin{aligned} c_i &\rightarrow c_i' = c_i e^{i\varphi_i}, & \{c_i', c_j'^{\dagger}\} &= \delta_{ij} \\ \theta_{ij} &\rightarrow \theta'_{ij} = \theta_{ij} + \varphi_i - \varphi_j \\ H(\{c_i, \theta_{ij}\}) &= H(\{c_i', \theta'_{ij}\}) \end{aligned}$$

ただし各位相 θ_{ij} そのものには不定性があるが、 ϕ_P は確定する。またこれがユニタリ変換であることから観測量はすべて不変である。

次にこの格子系の一粒子のシュレディンガー方程式 $H|E\rangle = E|E\rangle$, $|E\rangle = \sum_{m,n} \psi_{m,n} c_{m,n}^{\dagger} |0\rangle$ を考えると ($V=0$ の時)

$$-t(e^{i\theta_{m-1,n}^x} \psi_{m-1,n} + e^{-i\theta_{m,n}^x} \psi_{m+1,n} + e^{i\theta_{m,n-1}^y} \psi_{m,n-1} + e^{-i\theta_{m,n}^y} \psi_{m,n+1}) = E\psi_{m,n}$$

となりこの波動関数についても

$$\psi_{m,n} = \psi(\vec{r}) = \psi(ma, na)$$

として a について 2次まで展開すると

$$-\frac{1}{2m} \left(\frac{\hbar}{i} \vec{\nabla} + \frac{e}{c} \vec{A} \right)^2 \psi(\vec{r}) = \epsilon \psi(\vec{r})$$

と連続空間における 磁場中のシュレディンガー方程式が得られる。ただしここで $\epsilon = \frac{\hbar^2}{2mta^2} (E - 4t)$ である (確認せよ)。

ここでこの系の一粒子エネルギーを計算してみよう。まず、位相の選び方つまり、ゲージとしてランダウゲージ

$$\theta_{m,n}^x = 0, \theta_{m,n}^y = 2\pi\phi m$$

をとり、 ϕ として $\phi = \frac{p}{q}$, p, q は互いに素な整数としよう。さらに境界条件としては $L_x \times L_y$ の系で周期的境界条件をとる。

ここでこのゲージでは x 方向に周期は q であることから運動量空間の演算子 $\bar{c}_1(K_x, k_y), \dots, \bar{c}_q(K_x, k_y)$ を次のように導入する。 (L_x は q で割り切れるとしよう。)

$$\begin{aligned} c_{m,n} &= c_{qm'+m'',n} = \frac{1}{\sqrt{L_x/q}} \frac{1}{\sqrt{L_y}} \sum_{K_x, k_y} e^{iK_x m' + ik_y n} \bar{c}_{m''}(K_x, k_y) \\ m &= qm' + m'', \quad m' = 1, \dots, L_x/q, \quad m'' = 1, \dots, q \\ K_x &= 2\pi \frac{n_x}{L_x/q}, \quad n_x = 1, \dots, L_x/q \\ k_y &= 2\pi \frac{n_y}{L_y}, \quad n_y = 1, \dots, L_y \end{aligned}$$

ここで $\bar{c}_i(K_x, k_y)$ は $\{\bar{c}_i(K_x, k_y), \bar{c}_j^{\dagger}(K'_x, k'_y)\} = \delta_{n_x, n'_x} \delta_{n_y, n'_y}$ 等を満たすフェルミ演算子であり、 $K_x \in [0, 2\pi]$, $k_y \in [0, 2\pi]$, $\Delta K_x = \frac{2\pi}{L_x/q}$, $\Delta k_y = \frac{2\pi}{L_y}$ である。ここで $K_x = qk_x$ とし ($\Delta k_x = \frac{2\pi}{L_x}$)、 $c_j(k_x, k_y) = \bar{c}_j(qk_x, k_y)$ とすると x 方向のとりうる波数は

$$k_x \in \left[0, \frac{2\pi}{q}\right], \quad k_y \in [0, 2\pi]$$

であり、ブリルアンゾーンが $1/q$ になっている。これはゲージを固定する際に実空間の周期が q 倍になったことを反映しており、磁氣的ブリルアンゾーンと呼ばれる。なおフェルミ演算子の周期は N, M を任意の整数として

$$c_j(k_x + N\frac{2\pi}{q}, k_y + M2\pi) = c_j(k_x, k_y)$$

であり、磁氣的ブリルアンゾーン上 x, y 各方向に 0 と $2\pi/q$ 、 0 と 2π を同一視するわけで磁氣的ブリルアンゾーンはトーラス T_{MBZ} と見なせることに注意しよう。

このとき並進演算子は

$$\mathbf{c}(\vec{k}) = \begin{pmatrix} c_1(\vec{k}) \\ \vdots \\ c_q(\vec{k}) \end{pmatrix}$$

をもちいて

$$\begin{aligned} T_x &= \sum_{k_x, k_y} \mathbf{c}^\dagger(\vec{k}) \begin{pmatrix} 0 & & e^{-iqk_x} \\ 1 & 0 & \\ & \ddots & \ddots \\ & & 1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{c}(\vec{k}) \\ &= L_x L_y \int_{T_{MBZ}} \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \mathbf{c}^\dagger(\vec{k}) \begin{pmatrix} 0 & & e^{-iqk_x} \\ 1 & 0 & \\ & \ddots & \ddots \\ & & 1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{c}(\vec{k}) \\ T_y &= \sum_{k_x, k_y} \mathbf{c}^\dagger(\vec{k}) e^{-ik_y} \text{diag}(e^{i2\pi\phi}, \dots, e^{i2q\pi\phi}) \mathbf{c}(\vec{k}) \\ &= L_x L_y \int_{T_{MBZ}} \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \mathbf{c}^\dagger(\vec{k}) e^{-ik_y} \text{diag}(e^{i2\pi\phi}, \dots, e^{i2q\pi\phi}) \mathbf{c}(\vec{k}) \end{aligned}$$

¹² となる。よってハミルトニアンは

$$\begin{aligned} H &= (-t) L_x L_y \int_{T_{MBZ}} \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \mathbf{c}^\dagger(\vec{k}) \mathbf{H}_0(\vec{k}) \mathbf{c}(\vec{k}) \\ \mathbf{H}_0(\vec{k}) &= \begin{pmatrix} 2 \cos(k_y - 2\pi\phi) & 1 & 0 & \dots & e^{-iqk_x} \\ 1 & 2 \cos(k_y - 4\pi\phi) & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \cos(k_y - 6\pi\phi) & 1 & \vdots \\ 0 & \ddots & \dots & \dots & \vdots \\ e^{iqk_x} & 0 & \dots & 1 & 2 \cos(k_y - 2\pi q\phi) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となる。

以下詳しく議論する前に基本的な事実を確認しておこう。まず、ハミルトニアンがフェルミ演算子について2次形式であることから、1粒子固有状態はバンドインデックス $\ell = 1, \dots, q$ を持つ

$$\sum_{K_x, k_y} = \sum_{k_x, k_y} = \frac{1}{\Delta k_x \Delta k_y} \int_0^{2\pi/q} dk_x \int_0^{2\pi} dk_y = L_x L_y \int_0^{2\pi/q} \frac{dk_x}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{dk_y}{2\pi} = L_x L_y \int_{T_{MBZ}} \frac{d^2k}{(2\pi)^2}$$

ロッシ関数 $|\psi^\ell(\vec{k})\rangle$ で与えられる。

$$\begin{aligned} H|\psi^\ell(\vec{k})\rangle &= E^\ell(\vec{k})|\psi^\ell(\vec{k})\rangle \\ |\psi^\ell(\vec{k})\rangle &= \sum_j c_j^\dagger \psi_j^\ell |0\rangle \\ \psi^\dagger(\vec{k}) \mathbf{H}_0(\vec{k}) \psi(\vec{k}) &= \text{diag}(E^1(\vec{k}), \dots, E^q(\vec{k})) \end{aligned}$$

ここで各バンドごとの規格化されたブロッホ関数を列ベクトルとしてならべた係数行列 $\psi = (\psi^1, \dots, \psi^q)$ はユニタリである。

まず特定のフラックスに対してエネルギーバンドを書いてみよう。図参照。

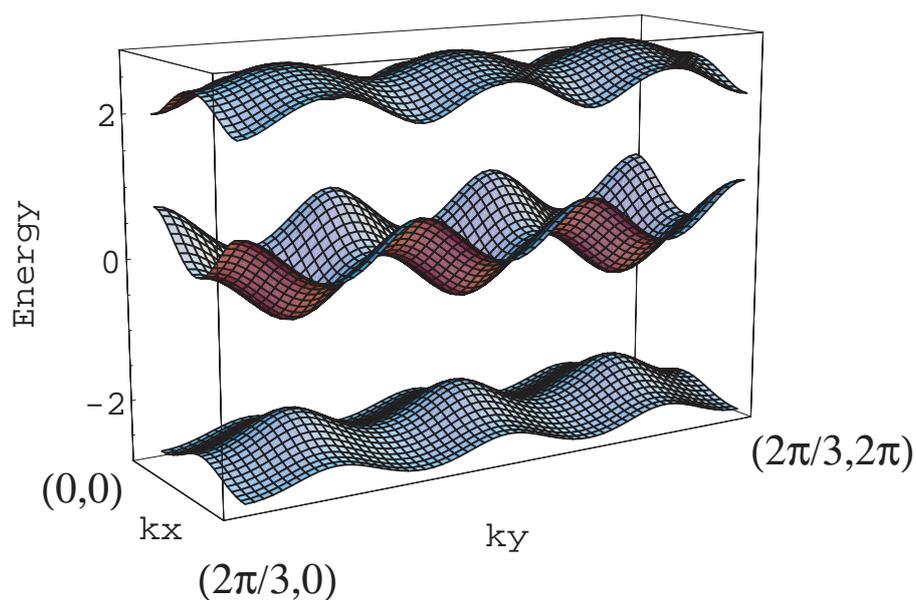


図 2: $\phi = \frac{1}{3}$ の時のエネルギー分散

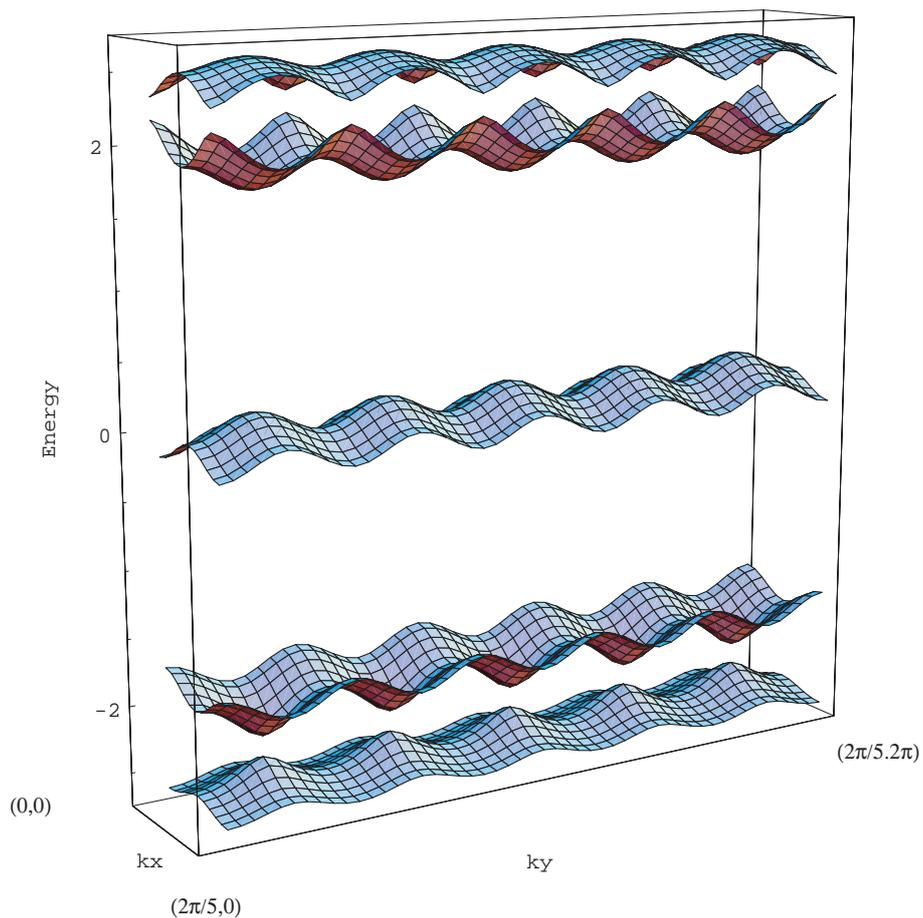


図 3: $\phi = \frac{2}{5}$ の時のエネルギー分散

さらにこの系のスペクトル $E^b(\vec{k})$ を ϕ を変えながら図示したものがフラクタル構造として有名な Hofstadter のバタフライである。(図 4) [11, 12, 13, 14]

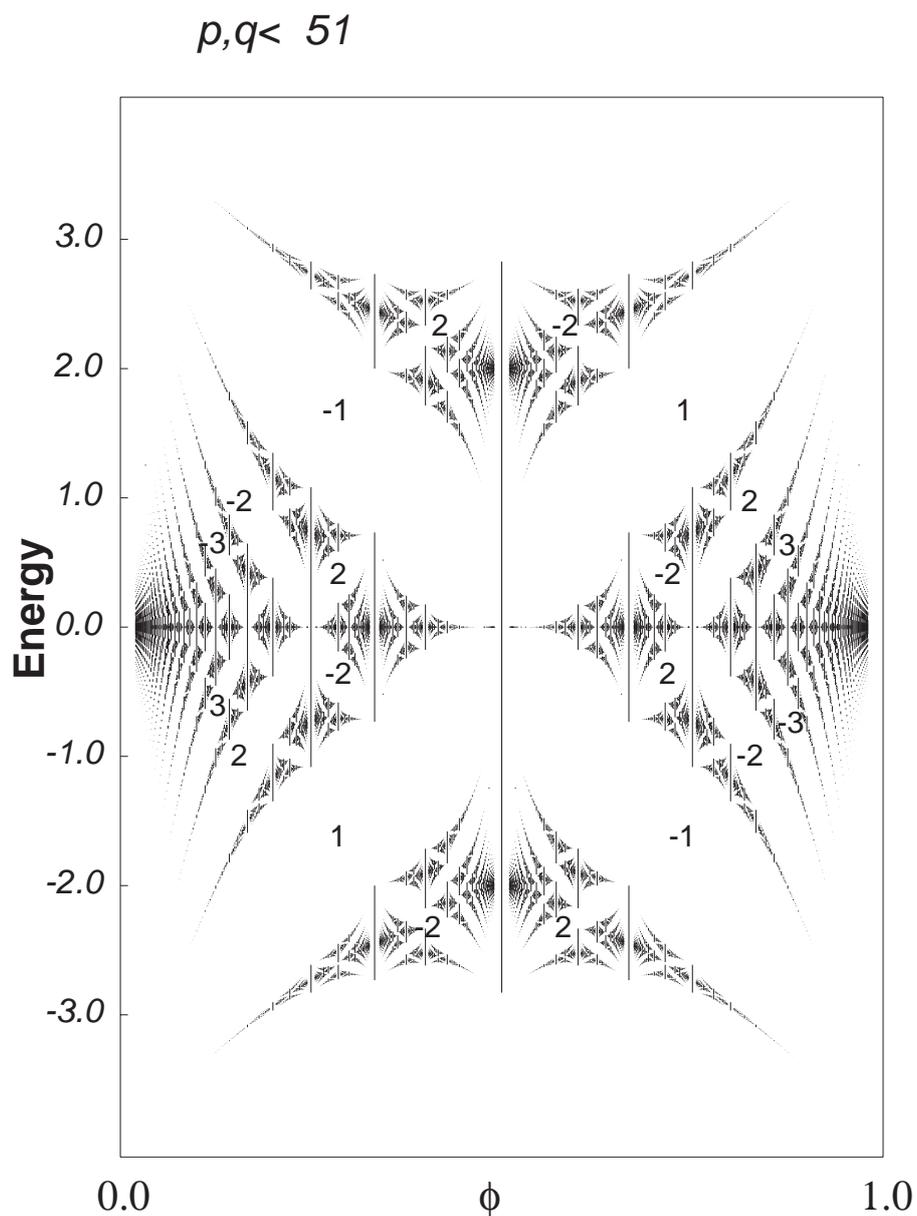


図 4: 格子上磁場中のフェルミ粒子系の一粒子エネルギー: Hofstadter のバタフライ。図中の整数はフェルミエネルギーがそのエネルギーギャップにある時のホール伝導度 (e^2/h を単位として) である。[16]

このスペクトルの特徴はハミルトニアンからわかるように $\phi = \frac{p}{q}$ (p, q 整数) のときエネルギーバンドが q 個に分かれていることにあり、見ての通り至る所に入れ子構造がありフラクタルとなっている。[12]¹³

さらに弱磁場の極限を考えると (この弱磁場の極限では磁束当たりのブラケット数が非常に多く格子の効果が見えなくなり連続体が再現される。) $\phi = \frac{1}{q}$ ($q \rightarrow \infty, \phi \rightarrow 0$) のとき非常にバン

¹³この構造がなぜ生じるかはあとで議論するとしてここではそれをまず認めてさきに進もう。

ド幅が狭い (以下のスケーリング極限でもそのバンド幅は 0 のままでそれがランダウ縮退に対応する。) バンドが ϕ を変えたとき数本の直線として図に現れているのがわかる。その直線は n を自然数として $E_n = \text{const.} + \Delta n \phi$ と書け定数をのぞいて $\frac{E_n}{\phi} \sim \Delta n$ となる。これは、バンド幅が非常に狭いこととあわせて、弱磁場の極限での等間隔のエネルギーギャップをもつランダウ準位の形成を示している。ここで更に有限系での状態数を数えてみよう。1 辺 L の有限な 2 次元系を考えるとサイト数は L^2 あり全一粒子状態も当然 L^2 個ある。よって q 個のエネルギーバンドの領域は L^2/q 個ずつの状態を含む。つまり弱磁場の極限でランダウ準位の縮退度は L^2/q となる。一方ブライケット当たりの磁束が $1/q$ だから系全体を貫く全磁束は $N_\phi = L^2/q$ となり、ランダウ準位の縮退度は系を貫く全磁束として与えられることとなる。このランダウ準位当たり (全磁束当たり) の電子数 N_e 、 $\nu = \frac{N_e}{N_\phi} = \frac{N_e}{L^2/q}$ をランダウ準位の占有率と呼び、量子ホール効果で重要な量である。

3 ホール伝導度とそのトポロジカルな意義

量子ホール効果は占有率 ν が特定の有理数 $\nu = p/q$ (q 奇数) のときのホール伝導度が $\sigma_{xy} = \nu \frac{e^2}{h}$ となり、 ν を変えて実験したとき小さい q のところに平らな部分 (プラトー) が現れるというものであり、 $\sigma_{xy} = \nu \frac{e^2}{h}$ という表式自体は乱れない連続系の場合容易にしめせるものでそれほどおどろくべきものではない。驚くべきは ν を上記のマジックナンバーの近傍で変化させても σ_{xy} は変化せずプラトーをつくるという点にあり、乱れの効果の議論も本質的に重要である。ただここではそれには触れず、 $\sigma_{xy} = \nu \frac{e^2}{h}$ が $\nu =$ 整数の場合、ある種の位相幾何学的量として書き直せることを紹介したい。

なぜ物理量を不変量で書こうとするのか、その気持ちだけをここで述べよう。ある物理量が本質的に離散的な量 (たとえば何かの個数) で書けたとするとすると乱れの強さ、相互作用等を連続に変化させても離散量の方は連続に変化することはできない。唯一許される連続変化は変化しないこと、というわけである。¹⁴

なおここでは ν が整数の場合に限って議論し ν が分数の場合は後でこの場合に帰着させることを試みる [24]。

3.1 無限系 (バルク) におけるホール伝導度のトポロジカルな意味 — 渦度、チャーン数 —

無限系の場合にホール伝導度を久保公式から書き直すことは有名な TKNN の論文でおこなわれた。[16]¹⁵ その結果をまず述べよう。

フェルミエネルギーが下から j 番目のエネルギーギャップにある時のホール伝導度 $\sigma_{xy}^{\text{bulk}}$ はフェルミエネルギー以下のエネルギーバンドのホール伝導度 σ_{xy}^{ℓ} の和として次のようになる。

TKNN formula

$$\begin{aligned}\sigma_{xy}^{\text{bulk}} &= \sum_{\ell=1}^j \sigma_{xy}^{\ell} \\ \sigma_{xy}^{\ell} &= -\frac{e^2}{h} \frac{1}{2\pi i} \int \int_{T_{MBZ}^2} dk_x dk_y \hat{z} \cdot \vec{B}^{\ell} \\ \vec{B}^{\ell} &= \text{rot } \vec{A}^{\ell} \\ \vec{A}^{\ell} &= \langle \psi^{\ell} | \vec{\nabla}_k \psi^{\ell} \rangle \\ &= \sum_j \psi_j^{\ell}(\vec{k}) \vec{\nabla} \psi_j^{\ell}(\vec{k})\end{aligned}$$

ここで $\psi^{\ell}(\vec{k})$ は下から ℓ 番目のバンドの規格化されたブロッホ関数である。

この表式の意味は次節以降で説明するが、チャーン数と呼ばれる位相幾何学的な意味を持つ特徴的な整数であることを注意しておく。[16, 17, ?, 23, 18, 19]

¹⁴当然どのくらい変化させても変化しないかという見積もりが重要であり、その見積もりをきちんとするのがむずかしい。これを定量的にしようとするれば、例えばエネルギーギャップのある場合に断熱近似を用いることが考えられる。

¹⁵D. J. Thouless, M. Kohmoto, M. P. Nightingale, and M. den Nijs, Phys. Rev. Lett **49** 405 (1982).

3.1.1 断熱近似による TKNN 公式の導出

ホール伝導度を議論するために磁場に加えてさらに x 方向に電場 E_x をかけ y 方向の電流を計算してみよう。まず Maxwell の方程式よりスカラーポテンシャルがない場合 $E_x = -\frac{1}{c} \frac{\partial A_x}{\partial t}$ であることより、電場の効果を時間に依存するハミルトニアンとして取り込むことを考える。さらに(便宜上)パラメーター Φ を含む形にハミルトニアンを拡張しておく。これはいわゆるアハロノフ・ボーム磁束に対応する。このときのハミルトニアンは次の形をとる。(波数の和は磁気ブリルアンゾーン $0 \leq k_x \leq 2\pi/q, 0 \leq k_y \leq 2\pi$ の上でとる。以下これを常に仮定する。 $\int_{T_{MBZ}} \frac{d^2k}{(2\pi)^2}$)

$$\begin{aligned} H(t, \Phi) &= T_x e^{-i2\pi \frac{acE_x}{\Phi_0} t} + T_y e^{i2\pi \frac{\Phi}{\Phi_0} \frac{1}{L_y}} + h.c. \\ &= \int_{T_{MBZ}} \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \tilde{H}(t, \Phi, \vec{k}) \\ &= \int_{T_{MBZ}} \frac{d^2k}{(2\pi)^2} c^\dagger(\vec{k}) \mathbf{H}(t, \Phi, \vec{k}) c(\vec{k}) \\ \mathbf{H}(t, \Phi, \vec{k}) &= \mathbf{H}_0(k_x + 2\pi \frac{acE_x}{\Phi_0} t, k_y - 2\pi \frac{\Phi}{\Phi_0} \frac{1}{L_y}) \end{aligned}$$

ここで y 方向の全電流演算子 I_y を次のように書こう。(Byers-Yang の公式とよばれる。)

$$I_y = \frac{e}{\hbar} i(T_y - T_y^\dagger) = c \frac{\partial H}{\partial \Phi} \Big|_{\Phi=0} = c \partial_\Phi H(t, \Phi) \Big|_{\Phi=0}$$

以下断熱近似の範囲で時間に依存する摂動論により y 方向の電流 (電流演算子の期待値) を電場の効果を最低次まで計算する。

まず次の事実から確認しよう。一般に時間に依存するハミルトニアン $H(t)$ の基底状態 $|G(t)\rangle$ はスナップショットハミルトニアンの規格直交化された固有状態 $|\alpha(t)\rangle$

$$H(t)|\alpha(t)\rangle = E_\alpha |\alpha(t)\rangle, \quad E_g \leq E_\alpha$$

を用いて

$$|\langle a_\alpha | \dot{g} \rangle| \ll |E_g - E_\alpha|, \quad \alpha \neq g$$

の範囲で

$$\begin{aligned} |G(t)\rangle &= e^{i\gamma} e^{\frac{1}{i\hbar} \int_0^t dt' E_g} \left(|g\rangle + i\hbar \sum_{\alpha \neq g} |\alpha\rangle \frac{\langle \alpha | \partial_{t'} g \rangle}{E_\alpha - E_g} \right) \\ i\gamma &= - \int_0^t dt' \langle g | \dot{g} \rangle \end{aligned}$$

となる。¹⁶

¹⁶まず

$$\begin{aligned} |G(t)\rangle &= e^{-i \frac{1}{\hbar} \int_0^t dt' E_g(t')} \sum_{\alpha} a_\alpha(t) |\alpha(t)\rangle \\ a_\alpha(0) &= \begin{cases} 1 & \alpha = g \\ 0 & \alpha \neq g \end{cases} \end{aligned}$$

まず 1 粒子ハミルトニアンを対角化するユニタリ行列 ψ を求めておく。

$$\begin{aligned}\psi^\dagger(\vec{k})\mathbf{H}(\vec{k})\psi(\vec{k}) &= \text{diag}(E^1(\vec{k}), \dots, E^1(\vec{k})) \\ \mathbf{H}(\vec{k})\psi^\ell(\vec{k}) &= E^\ell(\vec{k})\psi^\ell(\vec{k}) \\ \psi(\vec{k}) &= (\psi^1(\vec{k}), \dots, \psi^q(\vec{k}))\end{aligned}$$

これよりスナップショットの固有状態は一体の状態として (シングルスレーター行列式) 次のようにとれる。¹⁷

と展開する。よって

$$|\dot{G}\rangle = \frac{E_g}{i\hbar}|G\rangle + e^{-i\frac{1}{\hbar}\int_0^t dt' E_g(t')} \sum_{\alpha} (\dot{a}_{\alpha}|\alpha\rangle + a_{\alpha}|\dot{\alpha}\rangle) = \frac{1}{i\hbar}H|G\rangle = e^{-i\frac{1}{\hbar}\int_0^t dt' E_g(t')} \sum_{\alpha} \frac{E_{\alpha}}{i\hbar} a_{\alpha}|\alpha\rangle$$

$\langle g|$ との内積をとって

$$\frac{E_g}{i\hbar} a_g + \dot{a}_g + \sum_{\alpha} a_{\alpha} \langle g|\dot{\alpha}\rangle = \frac{E_g}{i\hbar} |g\rangle$$

$|a_{\alpha}| \ll |a_g|$, $\alpha \neq g$ の成立する時間を考えると $\dot{a}_g + a_g \langle g|\dot{g}\rangle \approx 0$ よって

$$a_g = e^{-\int_0^t dt' \langle g|\dot{g}\rangle} = e^{i\gamma}$$

$\langle \alpha|$, $\alpha \neq g$ との内積をとると

$$\frac{E_g}{i\hbar} a_{\alpha} + \dot{a}_{\alpha} + \sum_{\alpha'} a_{\alpha'} \langle \alpha|\dot{\alpha}'\rangle = \frac{E_{\alpha}}{i\hbar} a_{\alpha}$$

よって上と同じ時間においては

$$a_{\alpha} \approx i\hbar \frac{a_g \langle \alpha|\dot{g}\rangle}{E_g - E_{\alpha}} = i\hbar e^{i\gamma} \frac{\langle \alpha|\dot{g}\rangle}{E_g - E_{\alpha}}$$

これより求める表式が得られる。またこの近似の成立条件はこれより、

$$|\langle \alpha|\dot{g}\rangle| \ll |E_g - E_{\alpha}|$$

となる。
17

$$\tilde{c}^\dagger = c^\dagger \psi = c^\dagger (\psi^1, \dots, \psi^q)$$

として

$$c^\dagger \mathbf{H} c = \sum_{\ell} E^{\ell} \tilde{c}^{\ell\dagger} \tilde{c}^{\ell}$$

これら ψ^1, \dots, ψ^q から粒子数だけ状態をピックアップしたものが固有状態となる。なお波数を固定した場合の一粒子状態は

$$|\alpha\rangle = \prod_{\ell} \left(\sum_j c_j^\dagger \alpha_j^{\ell}(\vec{k}) \right) |0\rangle$$

と書け、この状態に列数がこの波数での占有数 M 、行数が q である行列 α を

$$\alpha = (\alpha^1, \dots, \alpha^M)$$

と対応させると (α^{ℓ} は q 次のベクトル)、状態空間としての内積は $M \times M$ 次の行列式で与えられることに注意しよう。

$$\langle \beta|\alpha\rangle = \det_M \beta^\dagger \alpha$$

$$\begin{aligned}
 H(t, \Phi)|\alpha(t, \Phi)\rangle &= E_\alpha(t, \Phi)|\alpha(t, \Phi)\rangle \\
 |\alpha(t, \Phi)\rangle &= \prod_{\vec{k}, \ell} \sum_j c_j^\dagger \psi_j^\ell(\vec{k}, t, \Phi)|0\rangle \\
 c_j^\dagger &= c_j^\dagger(k_x, k_y) \\
 \mathbf{H}(t, \Phi, \vec{k})\psi^\ell(t, \Phi, \vec{k}) &= \mathbf{H}_0(k_x + 2\pi \frac{acE_x}{\Phi_0} t, k_y - 2\pi \frac{\Phi}{\Phi_0} \frac{1}{L_y})\psi^\ell(t, \Phi, \vec{k}) \\
 &= E_0^\ell(t, \Phi, \vec{k})\psi^\ell(t, \Phi, \vec{k})
 \end{aligned}$$

を満たすことに注意する。例えば基底状態は波数 \vec{k} 及びバンドインデックス ℓ を $E^\ell(\vec{k}) \leq E_F$ を満たすように選ぶ。また特に最後の式より

$$\begin{aligned}
 \psi^\ell(t, \Phi, \vec{k}) &= \psi_0^\ell(k_x + 2\pi \frac{acE_x}{\Phi_0} t, k_y - 2\pi \frac{\Phi}{\Phi_0} \frac{1}{L_y}) \\
 E^\ell(t, \Phi, \vec{k}) &= E_0^\ell(k_x + 2\pi \frac{acE_x}{\Phi_0} t, k_y - 2\pi \frac{\Phi}{\Phi_0} \frac{1}{L_y})
 \end{aligned}$$

と書ける。ここで

$$\mathbf{H}_0(\vec{k})\psi_0^\ell(\vec{k}) = E_0^\ell(\vec{k})\psi_0^\ell(\vec{k})$$

は外場の無い場合のブロッホ関数が満たす式である。

よって

$$\begin{aligned}
 |\partial_t \alpha\rangle &= \sum_{\vec{k}_d, \ell_d} \prod_{\vec{k}, \ell} \left(\sum_j c_j^\dagger \psi_j^1(\vec{k}, t, \Phi) \right) \cdots \left(\sum_j c_j^\dagger \partial_t \psi_j^{\ell_d}(\vec{k}_d, t, \Phi) \right) \cdots |0\rangle \\
 &= 2\pi \frac{acE_x}{\Phi_0} \sum_{\vec{k}_d, \ell_d} \prod_{\vec{k}, \ell} \left(\sum_j c_j^\dagger \psi_j^1(\vec{k}, t, \Phi) \right) \cdots \left(\sum_j c_j^\dagger \partial_{k_x} \psi_j^{\ell_d}(\vec{k}_d, t, \Phi) \right) \cdots |0\rangle \\
 &\equiv 2\pi \frac{acE_x}{\Phi_0} |\partial_{k_x} \alpha\rangle
 \end{aligned}$$

ここで積の ' は \vec{k}_d, ℓ_d にだけ微分がかかりその他は $|\alpha\rangle$ と同じものが現れることを意味する。最後の式は前式の略記である。(微分は係数にのみ作用すると思える) これと全く平行に

$$\begin{aligned}
 |\partial_\Phi \alpha\rangle &= \sum_{\vec{k}_d, \ell_d} \prod_{\vec{k}, \ell} \left(\sum_j c_j^\dagger \psi_j^1(\vec{k}, t, \Phi) \right) \cdots \left(\sum_j c_j^\dagger \partial_\Phi \psi_j^{\ell_d}(\vec{k}_d, t, \Phi) \right) \cdots |0\rangle \\
 &= -2\pi \frac{1}{\Phi_0} \frac{1}{L_y} \sum_{\vec{k}_d, \ell_d} \prod_{\vec{k}, \ell} \left(\sum_j c_j^\dagger \psi_j^1(\vec{k}, t, \Phi) \right) \cdots \left(\sum_j c_j^\dagger \partial_{k_y} \psi_j^{\ell_d}(\vec{k}_d, t, \Phi) \right) \cdots |0\rangle \\
 &\equiv -2\pi \frac{1}{\Phi_0} \frac{1}{L_y} |\partial_{k_y} \alpha\rangle
 \end{aligned}$$

ここでも最後の式はその前の式の略記である。

次に以下の事実を確認しよう¹⁸

$$\langle \beta | \partial_\Phi H | \alpha \rangle = (E_\alpha - E_\beta) \langle \beta | \partial_\Phi \alpha \rangle = (E_\beta - E_\alpha) \langle \partial_\Phi \beta | \alpha \rangle, \quad (\beta \neq \alpha)$$

¹⁸ $H(t, \Phi)|\alpha(t, \Phi)\rangle = E_\alpha(t, \Phi)|\alpha(t, \Phi)\rangle$ より $(\partial_\Phi H)|\alpha\rangle + H|\partial_\Phi \alpha\rangle = (\partial_\Phi E_\alpha)|\alpha\rangle + E_\alpha|\partial_\Phi \alpha\rangle$ よって $\beta \neq \alpha$ として
 $\langle \beta | \partial_\Phi H | \alpha \rangle = (E_\alpha - E_\beta) \langle \beta | \partial_\Phi \alpha \rangle$

これより^{19 20}

$$\begin{aligned}
 \langle I_y \rangle &= \langle G | I_y | G \rangle \\
 &= ci\hbar \sum_{\alpha \neq g} \frac{\langle g | \partial_{\Phi} H | \alpha \rangle \langle \alpha | \partial_t g \rangle - \langle \partial_t g | \alpha \rangle \langle \alpha | \partial_{\Phi} H | g \rangle}{E_{\alpha} - E_g} \\
 &= ci\hbar \sum_{\alpha \neq g} (-\langle \partial_{\Phi} g | \alpha \rangle \langle \alpha | \partial_t g \rangle + \langle \partial_t g | \alpha \rangle \langle \alpha | \partial_{\Phi} g \rangle) \\
 &= (ci\hbar) \left(2\pi \frac{acE_x}{\Phi_0} \right) \left(-2\pi \frac{1}{\Phi_0} \frac{1}{L_y} \right) \sum_{\alpha \neq g} \left(\langle \partial_{k_x} g | \alpha \rangle \langle \alpha | \partial_{k_y} g \rangle - \langle \partial_{k_y} g | \alpha \rangle \langle \alpha | \partial_{k_x} g \rangle \right) \\
 &= -i2\pi \frac{e^2}{h} \frac{aE_x}{L_y} \sum_{\alpha \neq g} \left(\langle \partial_{k_x} g | \alpha \rangle \langle \alpha | \partial_{k_y} g \rangle - \langle \partial_{k_y} g | \alpha \rangle \langle \alpha | \partial_{k_x} g \rangle \right) \\
 &= -i2\pi \frac{e^2}{h} \frac{aE_x}{L_y} \left(\langle \partial_{k_x} g | \partial_{k_y} g \rangle - \langle \partial_{k_y} g | \partial_{k_x} g \rangle \right)
 \end{aligned}$$

また $\langle \beta(t, \Phi) | H(t, \Phi) = \langle \beta(t, \Phi) | E_{\beta}(t, \Phi)$ より

$$\langle \partial_{\Phi} \beta | H + \langle \beta | \partial_{\Phi} H = \langle \partial_{\Phi} \beta | E_{\beta} + \langle \beta | \partial_{\Phi} E_{\beta}$$

よって $\alpha \neq \beta$ として

$$\langle \partial_{\Phi} \beta | H | \alpha \rangle = (E_{\beta} - E_{\alpha}) \langle \partial_{\Phi} \beta | \alpha \rangle$$

また

$$\langle \alpha | \partial_{\Phi} H | \alpha \rangle = \partial_{\Phi} E_{\Phi} \text{ (Feynmann)}$$

¹⁹ $\langle g | I_y | g \rangle = 0$

²⁰ $\langle \partial_k g | g \rangle + \langle g | \partial_k g \rangle = 0$ を示せ。

$$\begin{aligned}
 \langle I_y \rangle &= \frac{e^2}{h} a E_x L_x \sum_{\ell} \frac{1}{2\pi i} \int_{T_{MBZ}} d^2 k (\text{rot}_k \vec{A}^{\ell})_z \\
 &= \sigma_{yx} V_x, \quad (V_x = E_x a L_x) \\
 \sigma_{yx} &= \frac{e^2}{h} \sum_{\ell} \frac{1}{2\pi i} \int_{T_{MBZ}} d^2 k (\text{rot}_k \vec{A}^{\ell})_z = -\sigma_{xy} \\
 \vec{A}^{\ell} &= \langle \psi^{\ell} | \vec{\nabla}_k \psi^{\ell} \rangle
 \end{aligned}$$

これが求める式であった。

3.1.2 チャーン数と渦度、ディラックモノポールとのアナロジー

前節で与えられたホール伝導度の表式のトポロジカルな意味をここで詳しく議論しよう [16, 17, 7, 23, 19]。前節の結果を次の様に書こう。

$$\begin{aligned}
 \sigma_{xy}^{j, \text{bulk}} &= -\frac{e^2}{h} C, \quad C = \sum_{\ell=0}^j c_{\ell} \\
 c_{\ell} &= \frac{1}{2\pi i} \int_{T_{MBZ}} d\vec{S}_k \cdot \vec{B}^{\ell} \\
 \vec{B}^{\ell} &= \text{rot}_k \vec{A}^{\ell} \\
 \vec{A}^{\ell} &= \langle \psi^{\ell} | \vec{\nabla}_k \psi^{\ell} \rangle \\
 |\Psi\rangle &= \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \vdots \\ \Psi_q \end{pmatrix}, \quad \sum_{k=1}^q |\Psi_k|^2 = 1
 \end{aligned}$$

この c_{ℓ} を ℓ 番目のバンドのチャーン数と呼ぶ。

最初に積分領域である磁氣的ブリルアンゾーンは x 方向に周期 2π , y 方向に周期 $2\pi/q$ と周期的でありトーラス T^2 と見なせることに注意しよう。よって単純にストークスの定理を適用すると境界がないことより

$$c_j = 0$$

となる これは正しくない。ブリルアンゾーン上で被積分関数に特異性があり全域で \vec{A} は定義されないのである。

この特異性をていねいに議論しよう。[17, 19] ²²

最初にブロッホ関数 $|\Psi(\vec{k})\rangle$ は位相の自由度を持つことに注意する。つまり任意の関数 $\xi_{BA}(\vec{k})$ に対して

$$|\Psi^B\rangle = e^{i\xi_{BA}(\vec{k})} |\Psi^A\rangle$$

これより

$$\begin{aligned}
 \langle I_y \rangle &= \frac{e^2}{h} a E_x L_x \sum_b \frac{1}{2\pi i} \int_{T_{MBZ}} d^2 k (\text{rot}_k \vec{A}^b)_z \\
 &= \sigma_{yx} V_x, \quad (V_x = E_x a L_x) \\
 \sigma_{yx} &= \frac{e^2}{h} \sum_b \frac{1}{2\pi i} \int_{T_{MBZ}} d^2 k (\text{rot}_k \vec{A}^b)_z = -\sigma_{xy}
 \end{aligned}$$

²²M. Kohmoto, Ann. Phys. (NY) 160,355 (1985). Y. Hatsugai, Phys. Rev. Lett. 71, 3697 (1993)

と2つのブロッホ関数 $|\Psi^{A,B}\rangle$ をの間の関係を定めれば

$$\vec{\mathcal{A}}^B = \langle \Psi^B | \vec{\nabla}_k \Psi^B \rangle = \vec{\mathcal{A}}^A + \vec{\nabla}_k \xi_{BA}(\vec{k})$$

よって

$$\text{rot } \vec{\mathcal{A}}^B = \text{rot } \vec{\mathcal{A}}^A$$

とチャーン数は不変である。これは磁氣的ブリルアンゾーン上でのゲージ変換と対応する場の量の不変性と解釈できる。このゲージ変換の自由度 (結局、これはよく知られた線形方程式の固有ベクトルの位相は確定しないことにこの自由度は起因する。) を用いて特異性なくチャーン数を計算することを考えよう。具体的に計算を実行するには何らかのゲージ (位相) を固定することが必要である。ここでは第一のゲージとしてある方法で得られた規格化されたブロッホ関数 $|\bar{\Psi}\rangle$ に適当な位相因子をかけ、ブロッホ関数の第 q 成分が正の実数となるようにしよう。

$$\begin{aligned} |\Psi^A\rangle &= e^{-i\text{Arg } \bar{\Psi}_q} |\bar{\Psi}\rangle \\ \Psi_q^A &> 0 \end{aligned}$$

これは $\bar{\Psi}_q$ のゼロ点以外であれば常に可能である。逆にいうと $\bar{\Psi}_q$ のゼロ点

$$\bar{\Psi}_q = 0$$

ではこのゲージ A (ルール) ではブロッホ関数が一意に決まらない。そこでこのような点

$$\vec{k} = \vec{k}_s, \quad s = 1, \dots, \quad \bar{\Psi}_q(\vec{k}_s) = 0$$

の近傍 R_s では別なゲージとして

$$\begin{aligned} |\Psi^B\rangle &= e^{-i\text{Arg } \bar{\Psi}_1} |\bar{\Psi}\rangle \\ \Psi_1^B &> 0 \end{aligned}$$

なるものをとることとしよう。(これらの近傍は $\bar{\Psi}_q$ のゼロ点を1個だけ含む、 $\bar{\Psi}_1$ のゼロ点は含まないように十分小さくとる。) この2つのゲージをつなぐゲージ変換は

$$\xi_{BA} = \text{Im} \log \frac{\bar{\Psi}_q}{\bar{\Psi}_1}$$

であり ($\bar{\Psi}_1, \bar{\Psi}_q$ のゼロ点以外で) 定義されることとなる。これらの2つのゲージを使い磁氣的ブリルアンゾーン T_{MBZ} を次のように分割する。

$$R = \bigcup_{i=1} R_s, \quad T_{MBZ} \setminus R$$

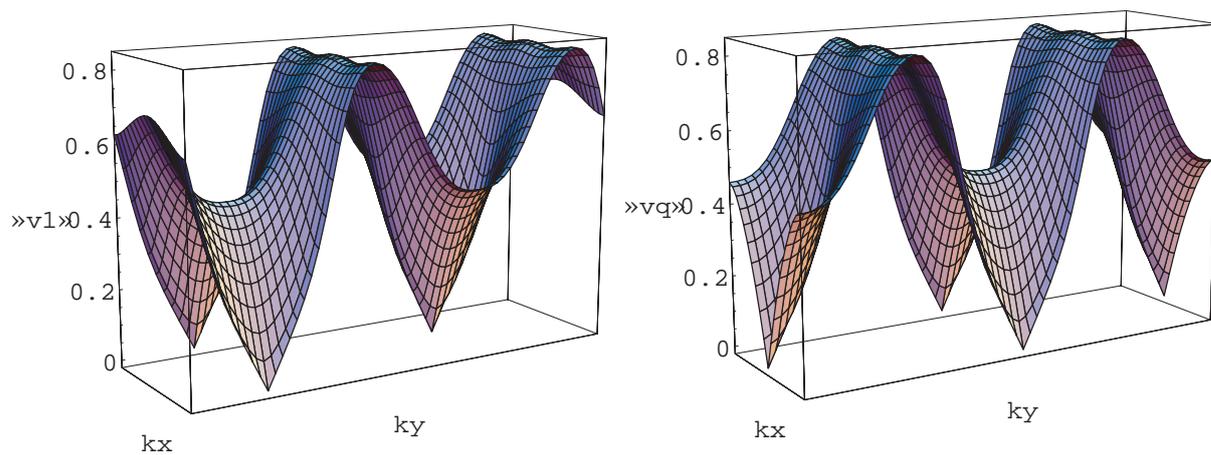


図 5: $\phi = \frac{1}{3}$ の場合の下から 2 番目のエネルギーバンドのブロッホ関数の振幅

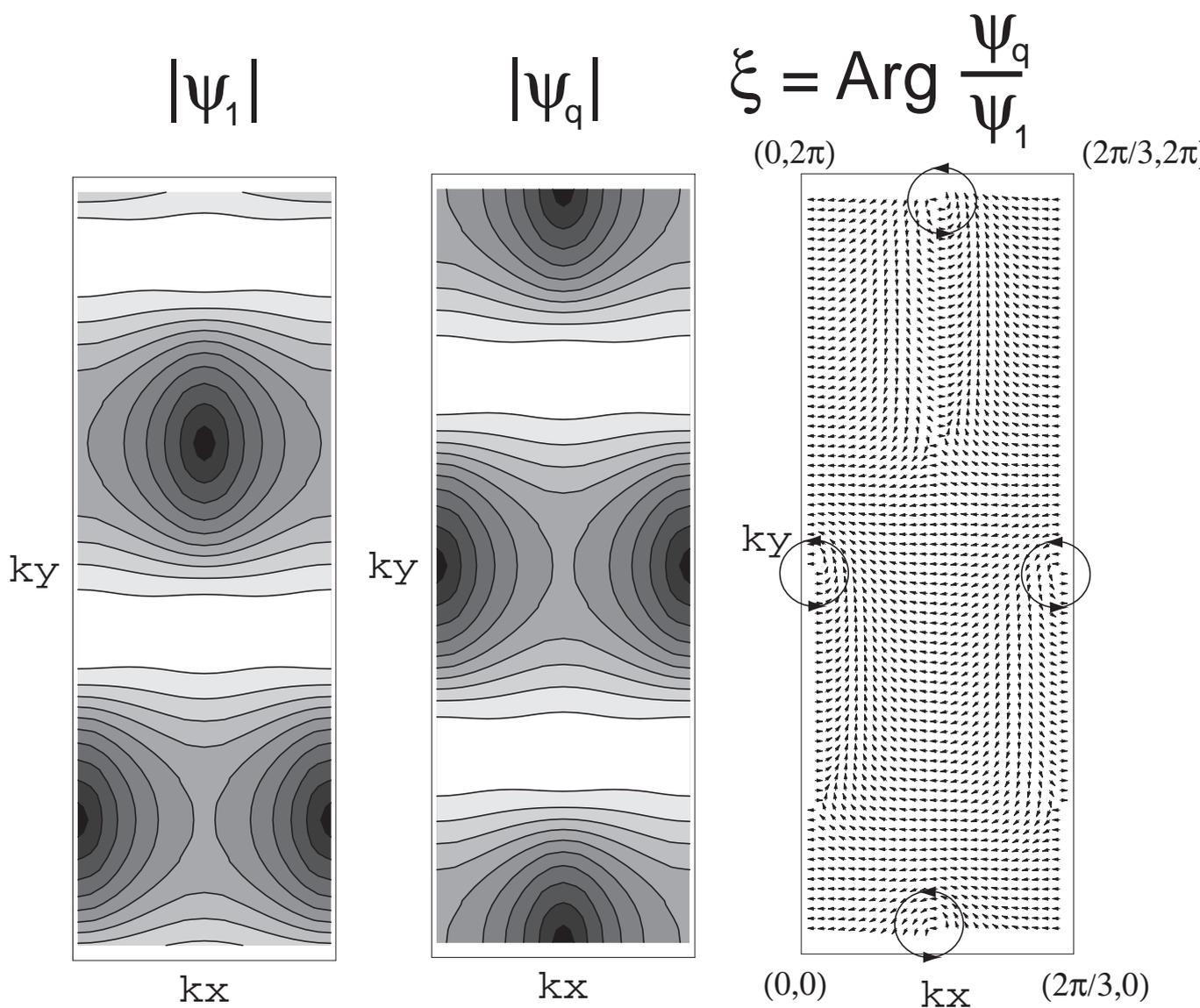


図 6: $\phi = \frac{1}{3}$ の場合の下から 2 番目のエネルギーバンドのブロッホ関数の振幅と相対位相から定まる渦度

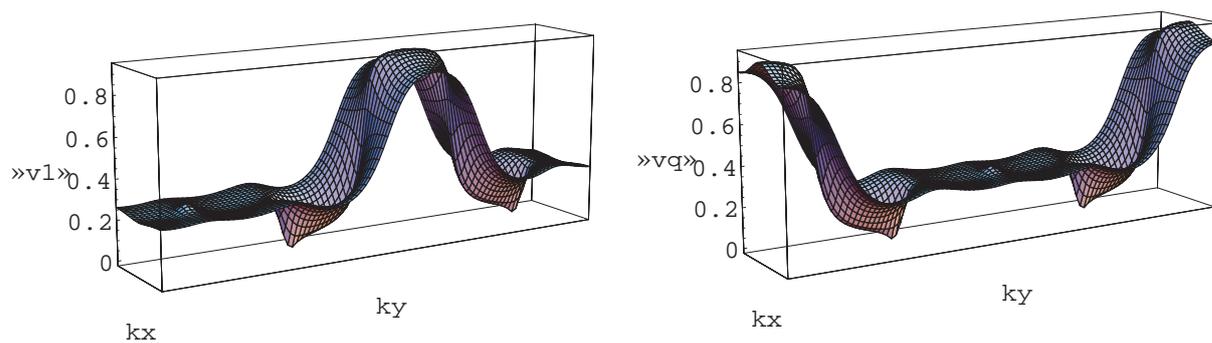


図 7: $\phi = \frac{2}{5}$ の場合の下から 1 番目のエネルギーバンドのブロッホ関数の振幅

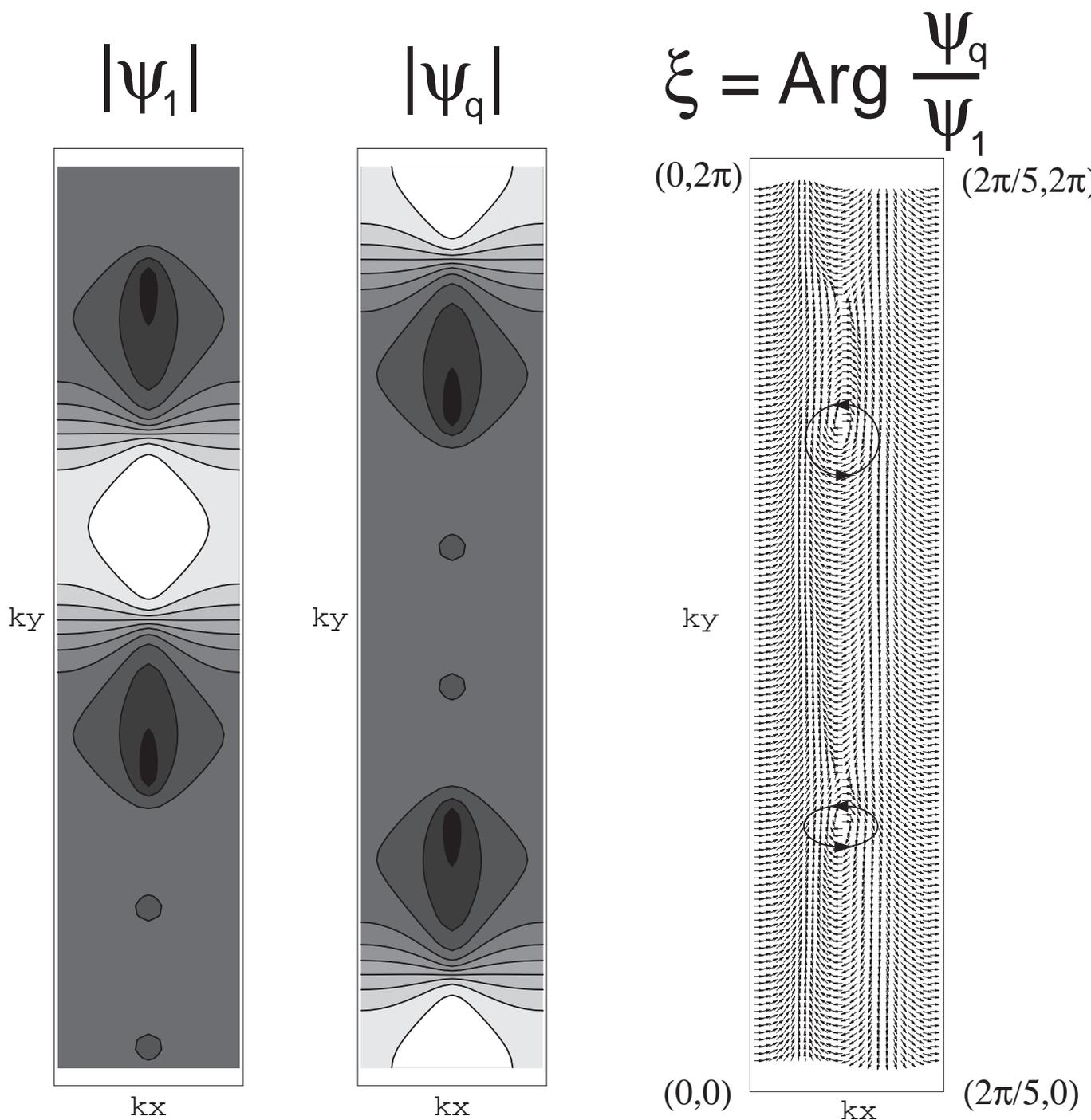


図 8: $\phi = \frac{2}{5}$ の場合の下から 1 番目のエネルギーバンドのブロッホ関数の振幅と相対位相から定まる渦度

その後、それぞれの領域でストークスの定理を使うこととするよって

$$\begin{aligned}
 c_j &= \frac{1}{2\pi i} \int_R d^2k (\text{rot } \mathcal{A}^B)_z + \int_{T_{MBZ} \setminus R} d^2k (\text{rot } \mathcal{A}^A)_z \\
 &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial R} d\vec{k} \cdot \vec{\mathcal{A}}^B + \oint_{\partial(T \setminus R)} d\vec{k} \cdot \vec{\mathcal{A}}^A \\
 &= \frac{1}{2\pi i} \sum_s \oint_{\partial R_s} d\vec{k} \cdot (\vec{\mathcal{A}}^B - \vec{\mathcal{A}}^A) \\
 &= \sum_s \frac{1}{2\pi} \oint_{\partial R_s} d\vec{k} \cdot \vec{\xi}_{BA} \\
 &= \sum_s \frac{1}{2\pi} \oint_{\partial R_s} d\vec{k} \cdot \text{Im} \log \Psi_q(\vec{k}) \\
 &= \sum_s N_s \\
 N_s &= \frac{1}{2\pi} \oint_{\partial R_s} d\vec{k} \cdot \text{Im} \log \Psi_q(\vec{k})
 \end{aligned}$$

となる。

つまりチャーン数はブロッホ関数 (の任意) のある成分のゼロ点が定義するゼロ点 (s) まわりの整数である渦度 N_s の和として与えられることがわかった。

これは数学的にはこの状況はファイバーバンドルとして記述されることを意味する。よく知られた類似の例としては Dirac の単磁極の例がある [29, 30]。このアナロジーによれば、ホール伝導度の量子化は単磁極の量子化のアナログとも考えられる。

これを復習してみよう。極座標表示された次の2つの異なるベクトルポテンシャルを考える。

$$\begin{aligned}
 \vec{\mathcal{A}}^A &= g \frac{1 - \cos \theta}{r \sin \theta} \vec{e}_\phi = g \frac{1}{r(r+z)} (-y, x), \quad \vec{e}_\phi = (-\sin \phi, \cos \phi) \\
 \vec{\mathcal{A}}^B &= -g \frac{1 - \cos \theta}{r \sin \theta} \vec{e}_\phi = -g \frac{1}{r(r-z)} (-y, x)
 \end{aligned}$$

これらは

$$\begin{aligned}
 \vec{\mathcal{A}}^A - \vec{\mathcal{A}}^B &= g \frac{2}{r \sin \theta} \vec{e}_\phi = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \xi_{BA}}{\partial \phi} \vec{e}_\phi, \\
 &= \vec{\nabla} \xi_{BA} \\
 \xi_{BA} &= 2g\phi
 \end{aligned}$$

と書ける。これらは ξ_{BA} によるゲージ変換で結ばれているためその磁場は等しく

$$\begin{aligned}
 \vec{B} &= \text{rot } \vec{\mathcal{A}}^A = \text{rot } \vec{\mathcal{A}}^B \\
 &= \frac{\vec{r}}{r^3}
 \end{aligned}$$

となり原点に磁場の湧き出しがあることとなる (磁気単極子)。ただし $\mathcal{A}^A, \mathcal{A}^B$ の定義域について考えてみると分母がゼロとなるところでは定義されていないことから

$$\begin{cases} \vec{\mathcal{A}}^A & : z \text{ 軸負方向をのぞく, } (\cos \theta \neq -1) \\ \vec{\mathcal{A}}^B & : z \text{ 軸正方向をのぞく, } (\cos \theta \neq +1) \end{cases}$$

となっていることに注意しよう。(これらの特異点はストリングと呼ばれることがある。)次に原点を含む閉曲面上(例えば単位球面上)で全磁束を計算することを考えると

$$\Phi_{total} = \int_S d\vec{S} \cdot \vec{B} = 4\pi g$$

となるのは \vec{B} の表式よりすぐにわかる。一方これをストークスの定理を用いてベクトルポテンシャルから計算してみよう。その際、上記のベクトルポテンシャルの特異性に注意すると球面 A を北半球 S_A 、南半球 S_B 、に分けそれぞれで異なるゲージを用いて計算することが必要となる。

$$\begin{aligned} \Phi_{total} &= \int_S d\vec{S} \cdot \vec{B} = \int_A d\vec{S} \cdot \vec{B} + \int_B d\vec{S} \cdot \vec{B} \\ &= \int_A d\vec{S} \cdot \text{rot } \vec{A}^A + \int_B d\vec{S} \cdot \text{rot } \vec{A}^B \\ &= \int_{\partial S_A} d\vec{r} \cdot \vec{A}^A + \int_{\partial S_B} d\vec{r} \cdot \vec{A}^B \\ &= \int_{C_{eq}} d\vec{r} \cdot (\vec{A}^A - \vec{A}^B), \quad (C_{eq} = \partial C_A : \text{赤道}, \theta = 0) \\ &= \int_{C_{eq}} d\vec{r} \cdot \vec{\nabla}_{\xi_{BA}} = \int_0^{2\pi} d\phi 2g = 4\pi g \end{aligned}$$

つまり、ベクトルポテンシャルに特異性がある場合、全系で一度に積分定理を使うのではなく適宜領域をパッチにわけそれぞれの領域ごとに適用すればよいことなのである。

3.2 境界のある系でのゲージ不変性による Laughlin の議論

ここでは Laughlin によるホール伝導度の量子化に関するゲージ不変性の議論を紹介したい [7, 8]。

現実のサンプルには必ず境界があることを考え図のようなシリンダー状のいわゆる Laughlin の配置を考えよう。ここで Φ はシリンダーを貫くアハロノフ・ボーム磁束である。

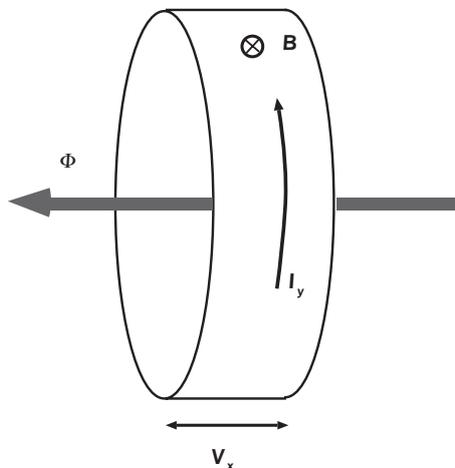


図 9: Laughlin の配置。シリンダー状の系に幅をよぎる方向に電圧をかけ、輪の方向の電流を測定する

この配置で Laughlin は次のような議論を行った。 Φ を断熱的に $\Delta\Phi$ だけ変化させる。その過程で系にした仕事量 ΔE を計算しよう。そのときシリンダーの輪方向の電流 I_y はいわゆる Byers-Yang の公式 [25] により、

$$I_y = c \frac{\Delta E}{\Delta\Phi}$$

となる。²³

このとき $\Delta\Phi = \Phi_0$ $\Phi_0 = \frac{hc}{e}$ は磁束量子である場合を考える。(系が十分大きいとき磁束単位の変化は境界条件の変化とみなせるので微小変化と考えられ微分に置き換えられる) アハロノフ・ボーム磁束を磁束量子変化させた場合、物理系は (大きな) ゲージ変換によりもとの状態に戻る。よってこのあいだになされた仕事量は、シリンダーの一方の端から他端へ 何個か (整数 n 個) 電子が移動されたことによると考えられる。そこでこの両端の間の電位差を V_x とすると $\Delta E = neV_x$ となる。これらを代入すれば

$$I_y = n \frac{e^2}{h} V_x$$

これが Laughlin による整数量子ホール効果の量子化に関する説明である。[7] これは非常に強力な議論で乱れのある場合等、種々の状況に拡張可能である汎用の考察である。ただし「ここでの n は整数ではあるがいくつであるかはこの議論からは定められない」点にその最大の弱点がある。

さらにこの議論は分数量子ホール効果の場合にも拡張されそこでの有効的な分数電荷の存在と基底状態の多重性を意味することとなる。(講義では時間があれば議論する予定)

実はこの Laughlin の議論では不定であった整数 n にはバルク (無限系) の場合とは全く異なる位相幾何学的意味があるのである。それについて次に紹介したい [18]。

3.3 境界を持つ系におけるホール伝導度のトポロジカルな意味 — リーマン面上でのエッジ状態の回転数と交点数 — [18]

配置としては Laughlin のものと同じシリンダー状の系を考える。具体的には図のような系を考え y 方向へは周期的境界条件をとる。ゲージとしては、シリンダーの両端をつなぐ方向へ増加するランダウゲージで考える。

²³当面のところこれをまず認めよう。

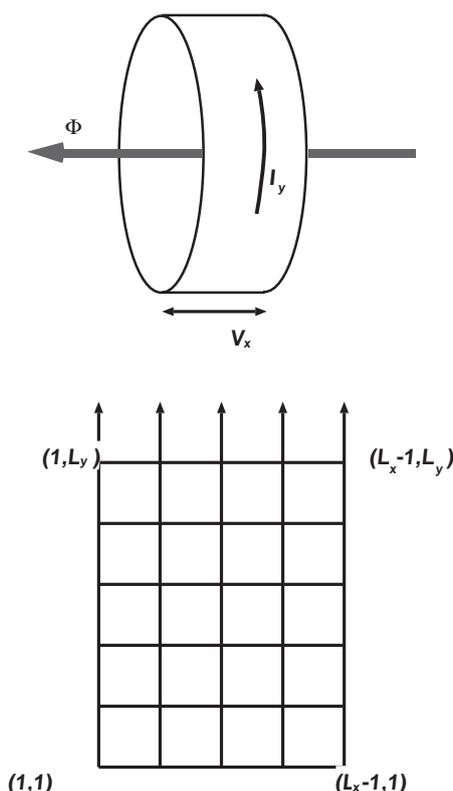


図 10: 格子上での境界のある系、Laughlin の配置。y 方向に L_y サイト、x 方向に $L_x - 1$ サイトとし、y 方向には周期的境界条件をおく。

次の数節は少し話が細かく、長くなる。そこで以下具体的に議論するまえに議論の大筋を説明しておこう。

このゲージのもとで系はシリンダーの輪の方向には最小の並進で不変であることに注意しよう。これより 2次元の問題は、シリンダーの輪の方向の波数 k_y ごとの 1次元系に帰着することに注意する。さらにこの 1次元系は両端をもつのでその両端に局在した束縛状態をもつ場合がある。この束縛状態が 2次元系の言葉では量子ホール効果においてエッジ状態と呼ばれるものである。その束縛状態の振る舞いがホール伝導度、つまり Laughlin の議論の未定の整数 n を定めるわけだが、その振る舞いはこの 1次元系の複素エネルギー面を考えるとわかりやすい。(量子力学で習う Levinson の定理を思い出してもらおうといいかもしれない。束縛状態 (エッジ状態) と散乱状態 (バルク状態) はお互いに関連しており、他の有名な応用としては Friedel の総和則があるのはよく知られている。) この複素エネルギー面はやや複雑でエネルギーバンドが q 個 ($\phi = p/q$ の時を考えて。) あることに対応して $g = q - 1$ 個の穴をもつ浮輪となる。(図 11) これはリーマン面と呼ばれる。

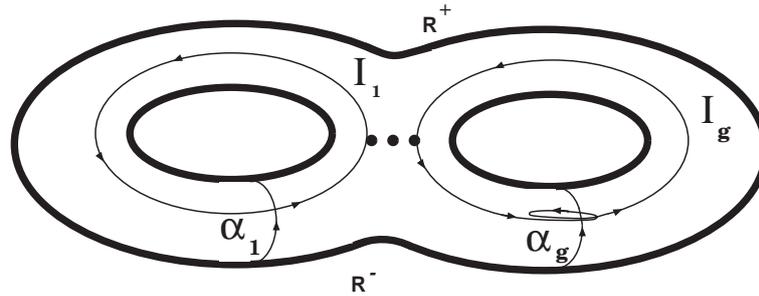


図 11: 磁場中の電子系の複素エネルギー面としてのリーマン面 Σ_g 。穴の数 $g = q - 1$ はエネルギーギャップの個数に等しく、単位格子あたりの磁束は $\phi\Psi_0 = \frac{p}{q}\Psi_0$ である。

この g 個の穴が $q - 1$ 個のエネルギーギャップに対応する。この複素エネルギー面上で束縛状態 (エッジ状態) のエネルギーは g 個存在することとなる。以上はシリンダーの輪方向の波数 k_y を固定した 1 次元系の議論である。次に、波数 k_y を 0 から 2π まで変化させることを考え 2 次元の問題を議論しよう。すると 0 と 2π は同一視すべきであることを考えると g 個のエッジ状態のエネルギーはこの浮輪上で閉曲線をつくることになる。復習すると浮輪の穴はエネルギーギャップ (下から j 番目のエネルギーギャップとしよう) に対応していたわけだがその穴のまわりをエッジ状態のエネルギーが何回か (I_j 回) まわるわけである。実はここで与えた回転数 I_j がフェルミエネルギーがそのエネルギーギャップにある状況における Laughlin の未定整数 n を与えることとなるのである。[18, 19]²⁴

境界を持つ系でのホール伝導度のトポロジカルな表式

$$\sigma_{xy}^{edge} = -I_j \frac{e^2}{h}$$

3.3.1 転送行列とエッジ状態

ハミルトニアンはバルクの場合と同じ次のものをとる。境界条件は y 方向には aL_y の長さで周期的 x 方向には $a(L_x - 2)$ の長さで固定端の境界条件をおく (サイト数としては $L_x - 1$ 個。)

配置としては Laughlin のものと同じシリンダー状の系を考える。具体的には図のような系を考え y 方向へは周期的境界条件をとる。ゲージとしては、シリンダーの両端をつなぐ方向へ増加するランダウゲージで考える。

$$H(\Phi) = \sum_{m,n} c_{m+1,n}^\dagger c_{m,n} + e^{i2\pi \frac{\Phi}{\Phi_0} \frac{1}{L_y}} \sum_{m,n} c_{m,n+1}^\dagger e^{i2\pi \phi m} c_{m,n}$$

現在の系は y 方向にだけ周期的であることに注意して y 方向には運動量表示とした演算子 $c_m(\vec{k})$ を導入しよう。

$$c_{m,n} = \frac{1}{\sqrt{L_y}} \sum_{\vec{k}_y = 2\pi \frac{n_y}{L_y}} e^{ik_y n} c_m(k_y), \quad (n_y = 1, \dots, L_y)$$

²⁴Y. Hatsugai, Phys. Rev. Lett. **71** 3697 (1993), Phys. Rev. **B48** 11851 (1993)

すると

$$H = \sum_{k_y} H(k_y, \Phi)$$

$$H(k_y, \Phi) = -t \sum_{m=1}^{L_x-2} [c_{m+1}^\dagger(k_y)c_m(k_y) + c_m^\dagger(k_y)c_{m+1}(k_y)]$$

$$-2t \sum_{m=1}^{L_x-1} \cos(k_y - 2\pi \frac{\Phi}{\Phi_0 L_y} - 2\pi\phi m) c_m^\dagger(k_y)c_m(k_y).$$

この系はをパラメーターとする 1 次元系のハミルトニアン之和であるから、1 次元系の一粒子シュレディンガー方程式

$$H(k_y, \Phi)|\Psi(k_y, \Phi)\rangle = E(k_y, \Phi)|\Psi(k_y, \Phi)\rangle$$

$$|\Psi(k_y, \Phi)\rangle = \sum_m \Psi_m(k_y, \Phi) c_m^\dagger(k_y)|0\rangle$$

をまず考えよう。ここで

$$\Psi_m(k_y, \Phi) = \Psi_m^0(k_y - 2\pi \frac{\Phi}{\Phi_0})$$

と Φ 依存性は k_y 依存性に吸収できることに注意しよう。まずこの波動関数 Ψ_m^0 は次の関係式を満たすことに注意しよう。

$$-t(\Psi_{m+1}^0(k_y) + \Psi_{m-1}^0(k_y)) - 2t \cos(k_y - 2\pi\phi m) \Psi_m^0(k_y) = E \Psi_m^0(k_y)$$

これを $\epsilon = \frac{E}{t}$ として、いわゆる転送行列の形で次のように書こう。

$$\begin{pmatrix} \Psi_{m+1}^0(\epsilon, k_y) \\ \Psi_m^0(\epsilon, k_y) \end{pmatrix} = \tilde{M}_m(\epsilon, k_y) \begin{pmatrix} \Psi_m^0(\epsilon, k_y) \\ \Psi_{m-1}^0(\epsilon, k_y) \end{pmatrix}$$

$$\tilde{M}_m(\epsilon, k_y) = \begin{pmatrix} -\epsilon - 2 \cos(k_y - 2\pi\phi m) & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

これを繰り返すついでに (添え字の 0 を省略する)

$$\begin{pmatrix} \Psi_{L_x+1}(\epsilon) \\ \Psi_{L_x}(\epsilon) \end{pmatrix} = (M(\epsilon))^l \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_0 \end{pmatrix},$$

$$M(\epsilon) = \tilde{M}_q(\epsilon) \tilde{M}_{q-1}(\epsilon) \cdots \tilde{M}_2(\epsilon) \tilde{M}_1(\epsilon) = \begin{pmatrix} M_{11}(\epsilon) & M_{12}(\epsilon) \\ M_{21}(\epsilon) & M_{22}(\epsilon) \end{pmatrix},$$

を得る。ここで $M_{11}(\epsilon), M_{12}(\epsilon), M_{21}(\epsilon), M_{22}(\epsilon)$ は ϵ のそれぞれ $q, q-1, q-1, q-2$ 次の多項式である。

この転送行列及び境界条件から系の波動関数、スペクトルが求まることとなる。(この 1 次元系は格子上の Hill 方程式と呼ばれ Strum-Liouville 型の微分方程式の一般論の格子アナログが古くからある (例えば戸田盛和著「非線形格子」等) ここでの 1 次元系での議論はその結果を使うこととなる。ここで我々の問題とする点はそれらがどのように 2 次元の物理と関連するかにある。[26, 27, 28])

付加的な条件として、ここで系の大きさに対して整合性の

$$L_x - 1 = q\ell, \quad \ell | (L_x - 1)$$

を要求しよう。

このとき、系のスペクトルは境界条件

$$\Psi_0 = \Psi_{L_x} = 0$$

から定まることとなる。規格化の条件として

$$\Psi_1 = 1$$

をとれば

$$\Psi_{L_x} = M_{21}(\epsilon) = 0$$

は $L_x - 1$ 次の方程式の解であり $L_x - 1$ 個の実根を持つ。これがこの 1 次元系のスペクトルを与えることとなる。(実根であることはそれらがエルミート行列の固有値であることから保証される。) まず

$$M_{12}(\epsilon) = 0$$

の解 μ_j , $j = 1, \dots, q - 1 = g$ が $\Psi_{L_x} = M_{21}(\epsilon) = 0$ を満たすことは三角行列の冪乗は三角行列であることからわかる。これらがすべて実であることは $g = q - 1$ サイトの系の固有値であることが保証する。実はこの $g = q - 1$ 個がエッジ状態のエネルギーである。

転送行列より k を一般の整数として

$$\Psi_{qk+1}(\mu_j) = [M_{11}(\mu_j)]^k$$

となる。これより一般には $|M_{11}(\mu_j)| \neq 1$ であるから

$$|M_{11}(\mu_j)| < 1: \quad x \approx 1 \text{ に局在したエッジ状態} \quad : (\text{左の境界})$$

$$|M_{11}(\mu_j)| > 1: \quad x \approx L_x - 1 \text{ に局在したエッジ状態} \quad : (\text{右の境界}).$$

であることがわかる。($|M_{11}(\mu_j)| \neq 1$ を満たす状態は後で判るようにバルク状態と縮退した状態であり、トポロジカルな議論においてもバルクとエッジの議論をつなぐ重要な役割を持つ。)

3.3.2 転送行列とバルク状態

転送行列を使って境界が無い場合つまりバルクの系について議論しよう。

境界の無い場合この 1 次元系は周期 q を持つ周期系であるからブロッホの定理により

$$\Psi_{m+q}(\epsilon) = \rho(\epsilon)\Psi_m(\epsilon), \quad |\rho(\epsilon)| = 1.$$

と書ける。これは

$$\begin{pmatrix} \Psi_{q+1} \\ \Psi_q \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} \Psi_{q+1} \\ \Psi_q \end{pmatrix} = \rho \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_0 \end{pmatrix}$$

つまり ρ は転送行列 M の固有値であることを意味する。これから $(\det \tilde{M}_m(\epsilon) = 1$ がすべての m で成立するので

$$\det M(\epsilon) = M_{11}(\epsilon)M_{22}(\epsilon) - M_{12}(\epsilon)M_{21}(\epsilon) = 1,$$

)

$$\rho^2 - \Delta\rho + 1 = 0, \quad \Delta = \text{Tr}M = M_{11} + M_{22}$$

を満たす。二次方程式の議論から $|\rho| = 1$ はエネルギー ϵ を実として

$$(\Delta(\epsilon))^2 \leq 4$$

と同値で、これがエネルギーバンドのエネルギーを与える式となることを注意しよう。一般にエネルギーバンドは q 個あるから

$$\Delta(\epsilon)^2 - 4 = (\epsilon - \lambda_1)(\epsilon - \lambda_2) \cdots (\epsilon - \lambda_{2q-1})(\epsilon - \lambda_{2q})$$

とバンド端のエネルギー $\lambda_j, (\lambda_i < \lambda_j, i < j)$ を用いて因数分解できることに注意しよう。よって

$$\rho(z) = \frac{1}{2}(\Delta(z) - \sqrt{\Delta(z)^2 - 4})$$

ここで分枝を定めるためにエネルギー ϵ を解析接続して複素エネルギー z を導入した。

次にバルクの系に対しても波動関数は境界を持つ場合と同様の規格化条件

$$\Psi_1 = 1$$

を要求すると転送行列の固有ベクトルから次のように Ψ_q は定まる。²⁵

$$\begin{aligned} \Psi_q(z) &= \frac{\rho(z)}{\rho(z) - M_{22}(z)} M_{21}(z) \\ &= \frac{M_{11} + M_{22} - \sqrt{\Delta^2 - 4}}{M_{11} - M_{22} - \sqrt{\Delta^2 - 4}} M_{21} \end{aligned}$$

ここで波動関数は複素エネルギー面上で定義されていることに注意しよう。

この複素エネルギー面 (リーマン面) についてここでしばらく議論しよう。

次の複素関数のリーマン面について考えよう。

$$f(z) = \sqrt{\Delta(z)^2 - 4} = \sqrt{(z - \lambda_1)(z - \lambda_2) \cdots (z - \lambda_{2q-1})(z - \lambda_{2q})}$$

まず、図の様に $g = q - 1$ 個のブランチカットを

$$[\lambda_1, \lambda_2], \cdots, [\lambda_{2q-1}, \lambda_{2q}]$$

を入れた R^+, R^- 2枚のシート (リーマン球: 無限遠点を同一視した複素平面) を用意する。

次にそれらをはりあわせてリーマン面を構成する。その際ブランチカットにおける向きに注意する。(図を参照) ただし分枝は R^+ 上で $z \rightarrow \infty$ のとき $\sqrt{\Delta^2 - 4} > 0$ ととろう。すると下から j 番目のエネルギーギャップのエネルギー内のエネルギー ϵ に関しては

$$\alpha(-1)^j \sqrt{\Delta^2 - 4} > 0, \quad z \in R^\alpha, (\alpha = \pm)$$

となる。

²⁵

$$\begin{pmatrix} M_{11} - \rho & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} - \rho \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_0 \end{pmatrix} = \vec{0}$$

より

$$\Psi_0(z) = \frac{M_{21}(z)}{\rho(z) - M_{22}(z)} = \frac{M_{11}(z) - \rho(z)}{M_{12}(z)}$$

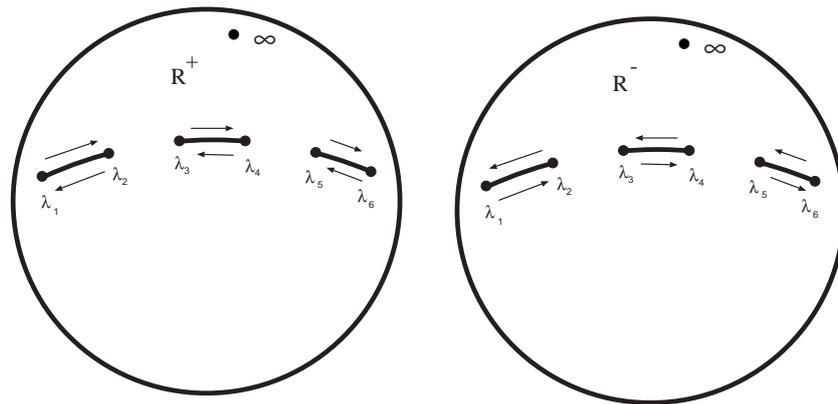


図 12: ステップ 1: 実軸にブランチカットをいれる

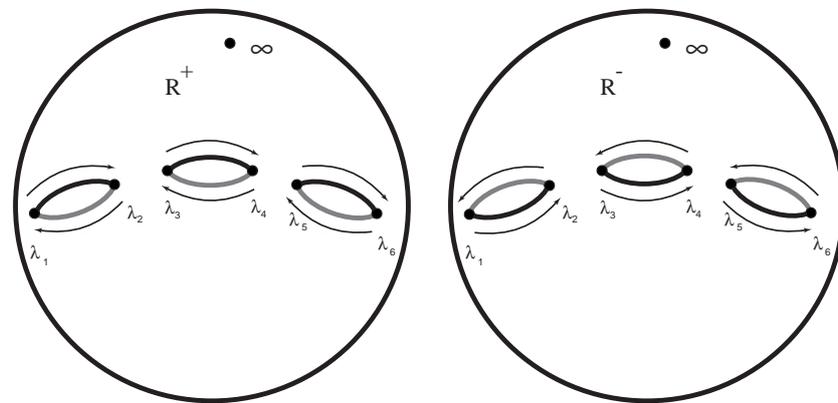


図 13: ステップ 2: 実軸にブランチカットをを切り開く

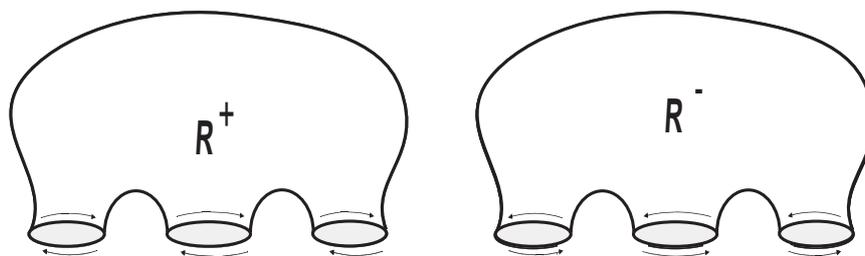


図 14: ステップ 3: 少し変形する

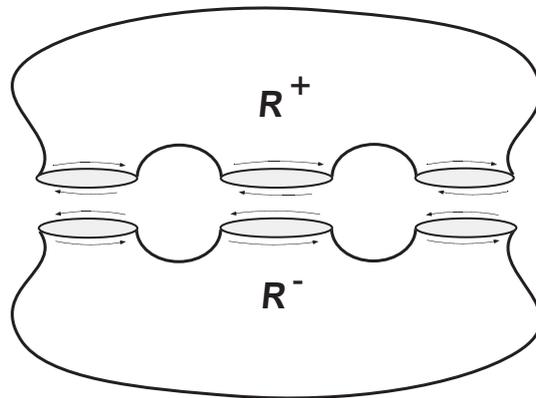


図 15: ステップ 4: 相対的な配置をかえ、張り合わせよう。

labelfig:step4

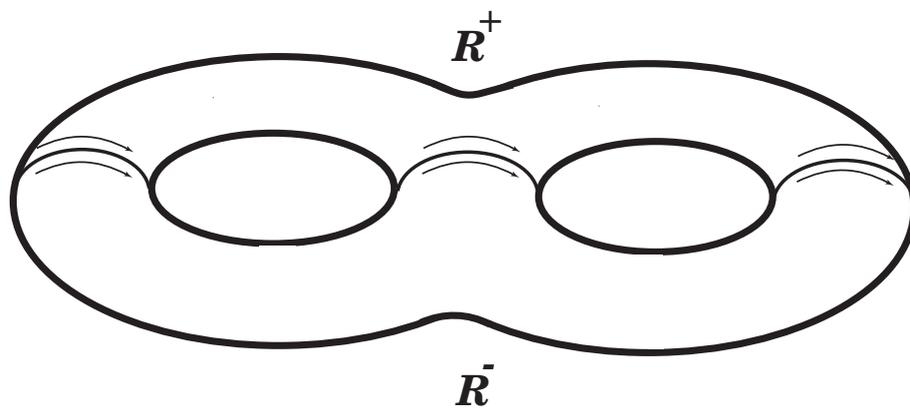


図 16: ステップ 5: 出来上がり: ギャップが 2 個あるとき穴が 2 個できた

この数学的事実を現在の物理的状況の下でまとめると

1次元系のリーマン面

$$\begin{aligned}
 \text{複素エネルギー面} &\leftrightarrow \text{種数 (穴の数) } g \text{ のリーマン面 } \Sigma_g \\
 q \text{ 個のエネルギーバンド} &\leftrightarrow q \text{ 個のブランチカット} \\
 &\quad (q \text{ 個}) \quad (\text{: リーマン面上くびれの部分}) \\
 g = q - 1 \text{ 個のエネルギーギャップ} &\leftrightarrow g = q - 1 \text{ 個のリーマン面上の穴}
 \end{aligned}$$

と対応することになる。

3.3.3 リーマン面上のエッジ状態

前節での議論より、波動関数はそのエネルギーに関してリーマン面 Σ_q 上で定義されていると考えられることがわかった。

ここでエッジ状態のエネルギー μ_j に関しては

$$M_{21}(\mu_j) = 0$$

であるから、 $\det M = 1$ より

$$M_{11}M_{22} = 1, \quad \Delta^2 - 4 = (M_{11} - M_{22})^2$$

さらに $\Delta(\epsilon)$ の最高次の係数を考えて

$$\Delta = M_{11} + M_{22} \begin{cases} \geq +2 & j: \text{偶数} \\ \leq -2 & j: \text{奇数} \end{cases}$$

よって

これからリーマン面上のブロッホ関数のエッジ状態のエネルギー近傍の振る舞いは²⁶

$$\Psi_q(\mu_j + \delta) \approx \frac{M_{11} + M_{22} - \alpha(-1)^j |M_{11} - M_{22}|}{M_{11} - M_{22} - \alpha(-1)^j |M_{11} - M_{22}|} M_{21}, \quad (\mu_j \in R^\alpha),$$

この分母をエッジ状態のエネルギー近傍で考えよう。まず j が偶数の場合 $M_{11} + M_{22} \geq 0$ であるから $M_{11}M_{22} = 1$ より

$$\begin{aligned}
 &M_{11} - M_{22} - \alpha |M_{11} - M_{22}| \\
 &= \begin{cases} M_{11} - M_{22} - \alpha(M_{22} - M_{11}) & \text{左の境界に局在 } |M_{11}| \leq 1 : (M_{22} \geq M_{11}) \\ M_{11} - M_{22} - \alpha(M_{11} - M_{22}) & \text{右の境界に局在 } |M_{11}| \geq 1 : (M_{11} \geq M_{22}) \end{cases}
 \end{aligned}$$

より

$$\begin{aligned}
 &M_{11} - M_{22} - \alpha |M_{11} - M_{22}| \\
 &\approx 0 \text{ (リニアにゼロとなる)}, \quad \begin{cases} \text{左の境界に局在} : \alpha = - \text{ の時} \\ \text{右の境界に局在} : \alpha = + \text{ の時} \end{cases}
 \end{aligned}$$

つぎに j が奇数の場合 $M_{11} + M_{22} \leq 0$ であるから $M_{11}M_{22} = 1$ より

$$M_{11} - M_{22} + \alpha|M_{11} - M_{22}| = \begin{cases} M_{11} - M_{22} + \alpha(M_{11} - M_{22}) & \text{左の境界に局在 } |M_{11}| \leq 1 : (M_{11} \geq M_{22}) \\ M_{11} - M_{22} + \alpha(M_{22} - M_{11}) & \text{右の境界に局在 } |M_{11}| \geq 1 : (M_{22} \geq M_{11}) \end{cases}$$

より

$$M_{11} - M_{22} + \alpha|M_{11} - M_{22}| \approx 0 \text{ (リニアにゼロとなる)}, \begin{cases} \text{左の境界に局在} : \alpha = - \text{ の時} \\ \text{右の境界に局在} : \alpha = + \text{ の時} \end{cases}$$

つまり j の偶奇によらず、 $\Psi_q(\mu_j)$ の上記の表式の分母はエッジ状態が左の境界に局在している時は $\alpha = -$ の時にまたは右の境界に局在しているときは $\alpha = +$ の時にリニアにゼロとなることがわかる。ここで $M_{21}(\epsilon)$ は μ_j でリニアにゼロとなるから Ψ_q はリーマン面上片方のシート上のエッジ状態のエネルギーのみゼロとなり、つまりエッジ状態の境界条件をみたし ($\Psi_q = \rho\Psi_0$) そのときのエッジ状態のエネルギーのシートとエッジ状態の局在している空間的位置が対応することがわかる。

これらの対応をまとめると

— ブロッチ状態のリーマン面とエッジ状態 —

$$\begin{aligned} \text{エッジ状態は左の境界に局在する} &\leftrightarrow \Psi_q(z) \text{ は } R^+ \text{ 上 } (z = \mu_j) \text{ で零点を持つ} \\ \text{エッジ状態は右の境界に局在する} &\leftrightarrow \Psi_q(z) \text{ は } R^- \text{ 上 } (z = \mu_j) \text{ で零点を持つ} \\ \text{エネルギーバンド} &\leftrightarrow \text{ブランチカット} \\ &(q \text{ 個}) \quad (:\text{リーマン面上のくびれ}) \\ \text{エネルギーギャップ} &\leftrightarrow \text{リーマン面上の穴} \\ &(g = q - 1 \text{ 個}) \end{aligned}$$

つまり複素エネルギー面としてのリーマン面上のブロッチ関数のゼロ点をみればエッジ状態の空間的な情報がえられることがわかった [18]。

3.3.4 リーマン面上の回転数、交点数と Laughlin の議論

前節の議論はすべて y 方向の波数 k_y を固定した 1 次元系のものであったがここでそれを 2 次元の問題へ適用しよう。まず、 k_y を変化させても 1 次元系のエネルギーギャップは閉じないものとしよう。つまり 2 次元の問題として安定なエネルギーギャップの存在を仮定しよう。(これが閉じる場合リーマン面にトポロジカルチェンジがおきるわけで、そこでは量子相転移が起り、後述する Dirac Fermion に有効的に現れることとなる。) この仮定のもとでは各波数でのリーマン面のトポロジカルな構造は不変であることに注意し、それらを同一視しよう。さらに波数 $k_y = 0$ と 2π は同一視されるから (ブリルアンゾーン) 束縛状態 (エッジ状態) の個数だけあるエッジ状態のエネルギーを与えるゼロ点 μ_j はリーマン面上で向きのついた閉ループ

$$C_j : \{z = \mu_j(k_y) | k_y \in [0, 2\pi]\}$$

を作ることとなる。一般には、これらの閉ループはリーマン面上の穴の周りを数回回転し、その符号をつけた回転数 I_j が定義されることとなる。

ここでいくつか具体的な計算例をしめそう。(図参照)

(a): $p= 2, q= 7 ; r=1.0$

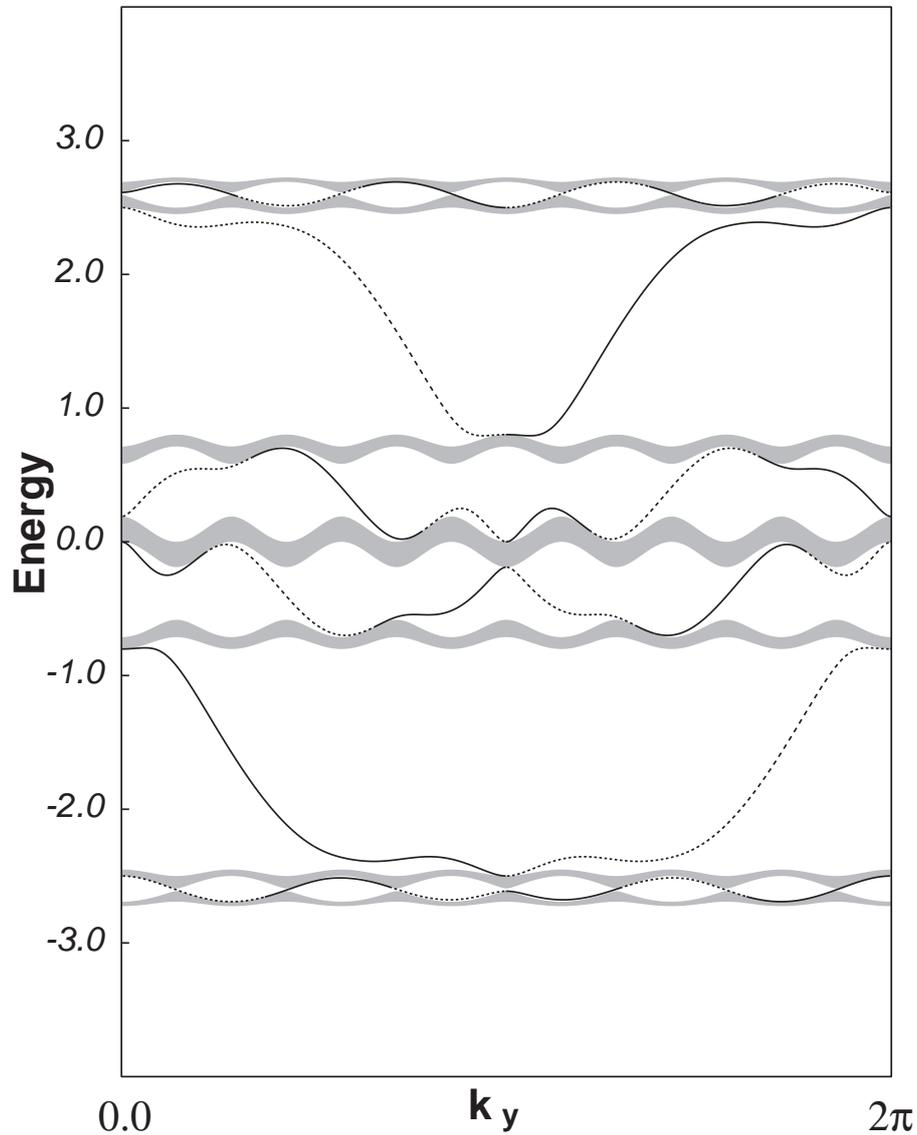


図 17: $\phi = \frac{2}{7}$ の場合のエネルギーバンド (斜線の領域) とエッジ状態のエネルギー (実線: 右端に局在したエッジ状態、破線: 左端に局在したエッジ状態)。エッジ状態が作る閉曲線のリーマン面上での交点数は下のエネルギーギャップから順に 1 である。

(b): $p=3, q=7; r=1.0$

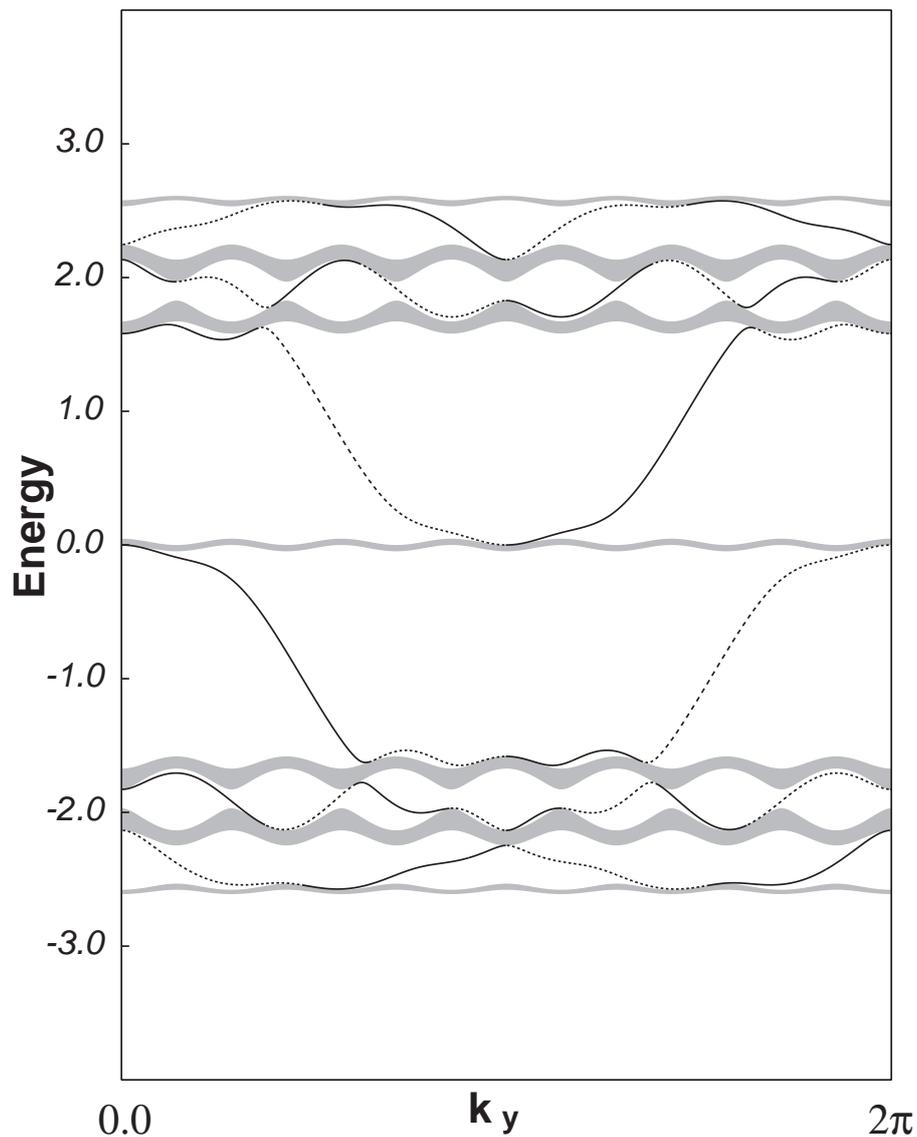


図 18: $\phi = \frac{3}{7}$ の場合のエネルギーバンド (斜線の領域) とエッジ状態のエネルギー (実線: 右端に局在したエッジ状態、破線: 左端に局在したエッジ状態)。エッジ状態が作る閉曲線のリーマン面上での交点数は下のエネルギーギャップから順に $-3, 1, -2, 2, -1, 3$ である。

(c): $p=2, q=5; r=1.0$

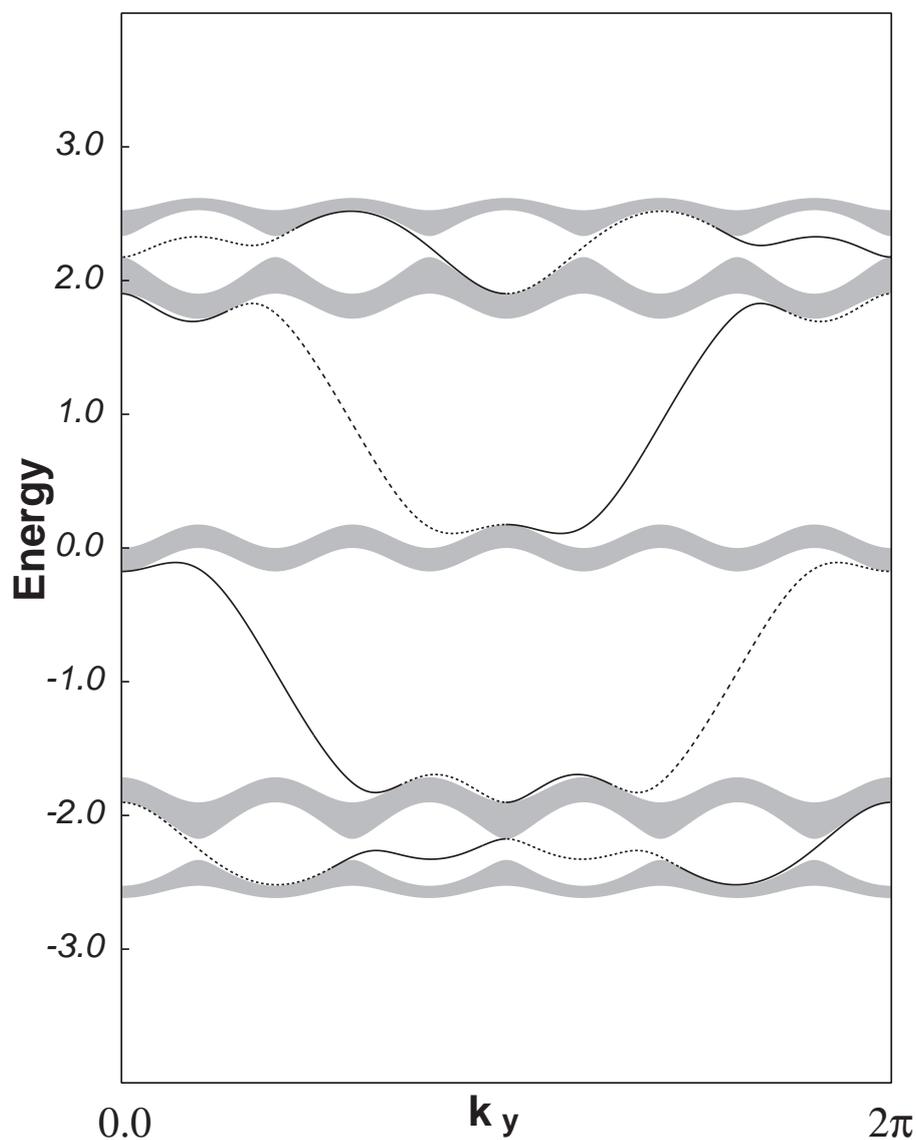


図 19: $\phi = \frac{2}{5}$ の場合のエネルギーバンド (斜線の領域) とエッジ状態のエネルギー (実線: 右端に局在したエッジ状態、破線: 左端に局在したエッジ状態)。エッジ状態が作る閉曲線のリーマン面上での交点数は下のエネルギーギャップから順に $-2, 3, 1, -1, -3, 2$ である。

(d): $p= 1, q= 6 ; r=1.0$

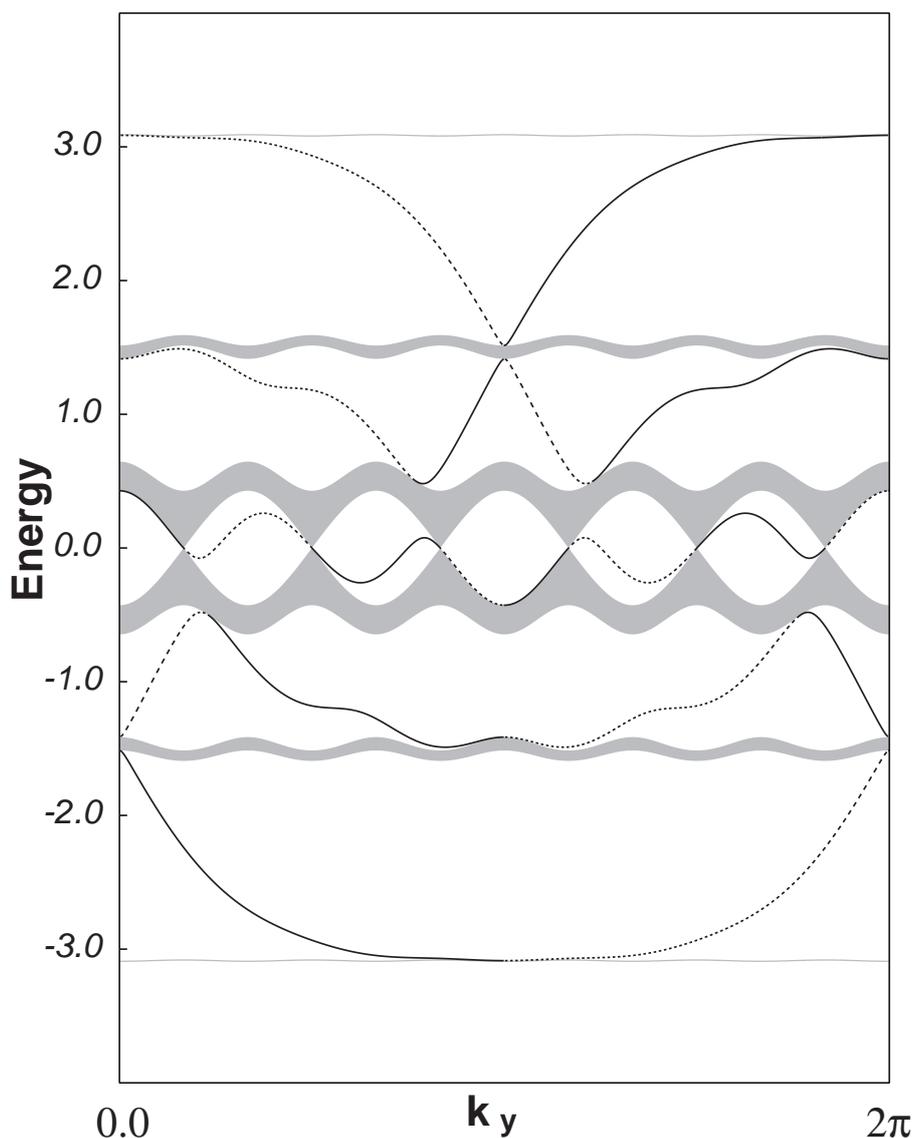


図 20: $\phi = \frac{1}{6}$ の場合のエネルギーバンド (斜線の領域) とエッジ状態のエネルギー (実線: 右端に局在したエッジ状態、破線: 左端に局在したエッジ状態)。エッジ状態が作る閉曲線のリーマン面上での交点数は下のエネルギーギャップから順に 1, 2, 不定, -2, -1 である。この場合、ギャップが途中で閉じるトポロジカルチェンジが起きる例である。

図中では各波数 k_y ごとに複素エネルギー面としてのリーマン面 $\Sigma_g(k_y)$ を考える。そのときの安定なギャップの数が $g = q - 1$ で、図で斜線で示した q 個の領域がエネルギーバンド、その間の領域がエネルギーギャップである。そのエネルギーギャップの中の実線、及び点線がエッジ状態のエネルギー μ_j 、すなわちプロット関数 Ψ_q のゼロ点で実線、点線はそのゼロ点がリーマン面 Σ_g 上 R^+, R^- にあること、つまりエッジ

状態が左端、または右端に局在していることを意味する。

一般的な状況にかえて、リーマン面上の基本的な閉ループ

$$\alpha_j, \quad j = 1, \dots, g$$

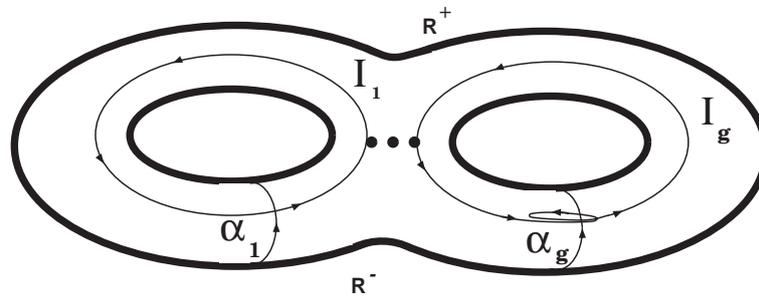


図 21: リーマン面上の閉曲線

を用いてブッロホ関数のゼロ点 (エッジ状態のエネルギー) の回転数はエネルギーギャップごとに定義されるこの曲線 C_j と標準的な曲線 α_j との交点数となることも見て取れるであろう [27]。

$$I_j = I(\alpha_j, C_j)$$

なお交点数については曲線間の交点ごとに図 22 のように向きにより符号をつけた交点数を定義し、曲線 A, B 間の交点数 $I(A, B)$ はその和と定義される。

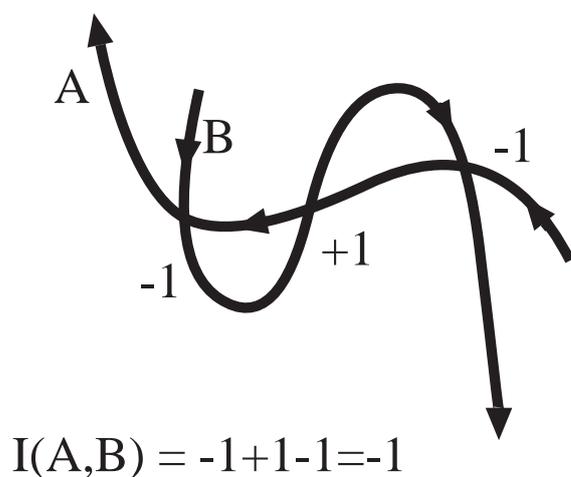
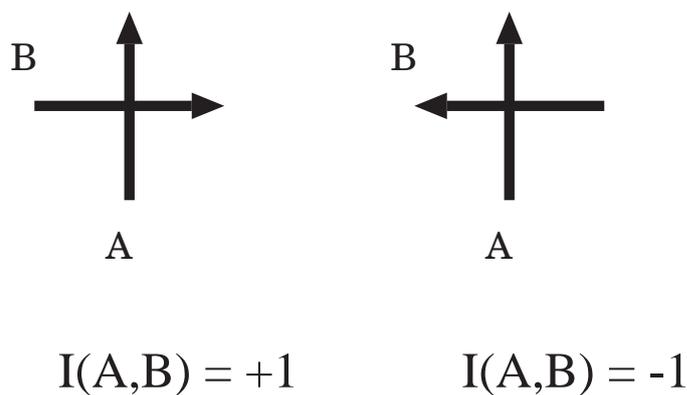


図 22: 曲線間の符号付き交点数

ここまでは数学の話だが、実は Laughlin の議論を用いるとこれが量子化されたホール伝導度となることがわかる。

これを次に説明しよう。

図の様にフェルミエネルギーがバルクのエネルギーギャップの中にある場合を考えよう。また y 方向の系の大きさ L_y も有限であることを思い出すと波数 k_y が離散的となる。さらに波数と Aharonov-Bohm 磁束 Φ は

$$k_y + 2\pi \frac{\Phi}{\Phi_0}$$

と結合し離散化された波数は

$$k_y = 2\pi \frac{\text{整数}}{L_y}$$

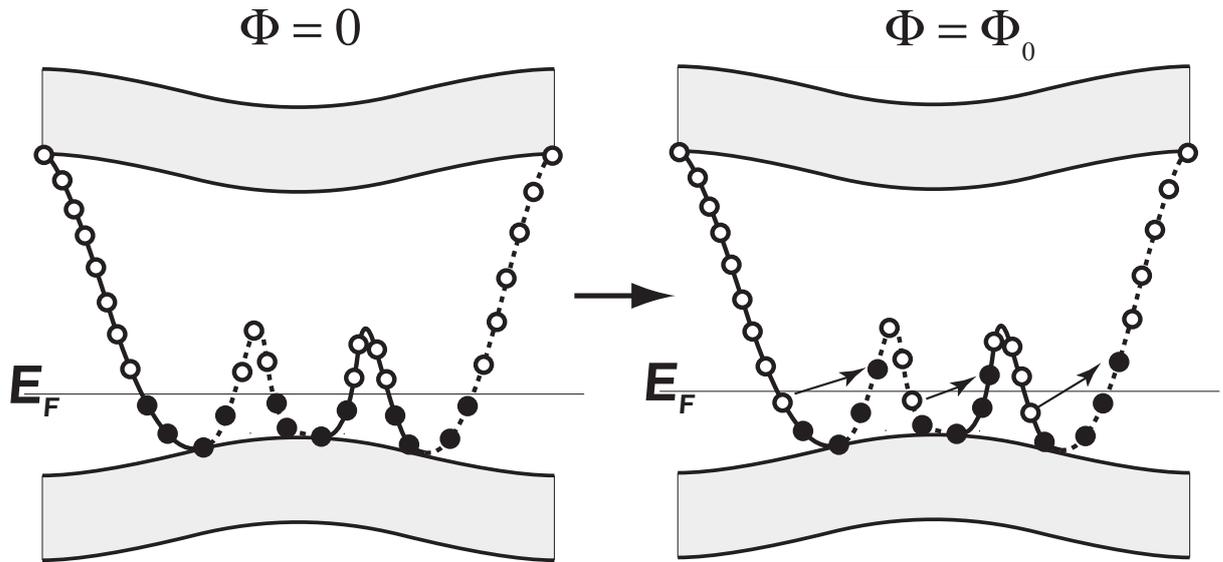


図 23: Laughlin の議論とエッジ状態、リーマン面上のゼロ点の移動の関係

であることに注意すれば、Aharonov-Bohm 磁束 Φ を Φ_0 だけ変化させたとき一粒子状態全体は不変であることはすぐわかる。

特に図のようにフェルミエネルギーがギャップ内にある場合、図で黒丸で示したエッジ状態が占有されていることとなる。そこで Aharonov-Bohm 磁束 Φ を Φ_0 だけ断熱的に増加させると、マクロな系では左右のエッジ状態間の行列要素は系の大きさに関して指数関数的に小さいのでその間での遷移は起こらないと考えてよい。よってこの過程の終状態としては下図の様な占有状態となる。ここでこの過程の前後、つまり図の左右を比べると、エネルギーバンド内の状態（バルク状態）はすべて元の状態に戻ったがエッジ状態は一つだけ玉突き式にずれた状態となっているのがわかるだろう。ここで与えられる状態の変化の個数がこの過程により両境界間を左から右へ移動した電子の数であり、Laughlin の議論で不定であった整数である。またリーマン面上のブロッホ関数のゼロ点とエッジ状態の対応からこの整数はエッジ状態の作る閉曲線の回転数となる！

つまり

— ホール伝導度のエッジ状態によるトポロジカルな表式 —

フェルミエネルギーが下から j 番目のエネルギーギャップにあるとき複素エネルギー面としてのブロッホ関数のゼロ点の作る閉曲線のリーマン面上の回転数（もしくは符号付き交点数）をもちいて、ホール伝導度は次のように与えられる [18]。

$$\sigma_{xy}^{j, \text{edge}} = -\frac{e^2}{h} I(C_j)$$

3.4 2つの位相不変量: — バルクかエッジか —

ここまでの議論でフェルミエネルギーが下から j 番目のエネルギーギャップの中にある場合系のホール伝導度に対して2つのトポロジカルな表式が与えられたこととなる。

$$\sigma_{xy}^{j, \text{bulk}} = -\frac{e^2}{h}C, \quad C = \sum_{\ell=0}^j c_{\ell}$$

$$\sigma_{xy}^{j, \text{edge}} = -\frac{e^2}{h}I(C_j)$$

この節ではこの2つの表式の間関係を考えてよう。チャーン数の位相幾何学的意味を議論した際用いたゲージによると Ψ_q のゼロ点周りの渦度の和としてチャーン数が与えられたことを思い出そう。転送行列の議論では規格化しない波動関数を常に扱っていたことに注意し、

$$\Psi_q = 0$$

はエッジ状態を定義したことを思い出そう。また x 方向の波数 k_x はブロッホの定理から

$$\rho = e^{iqk_x}$$

と対応し、バンド端の条件

$$\Delta = \pm 2$$

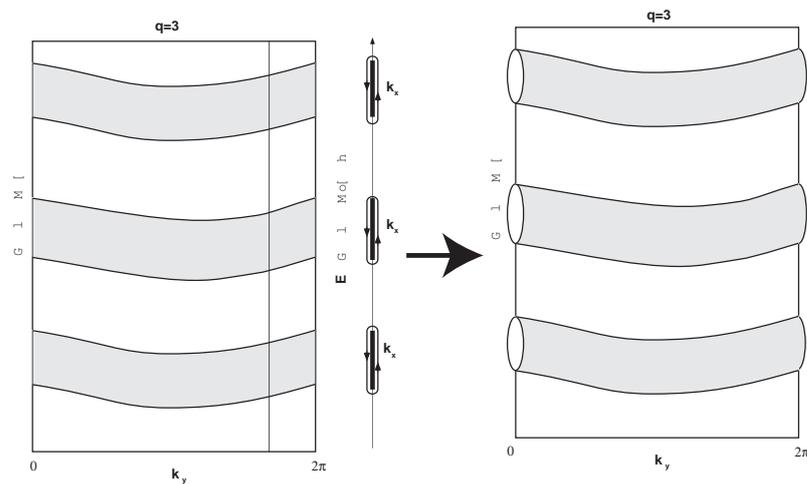


図 24: エッジ状態とバルクの関係。ブランチカットの領域は x 方向の波数 k_x でパラメトライズすると円となる (k_x の周期性)。

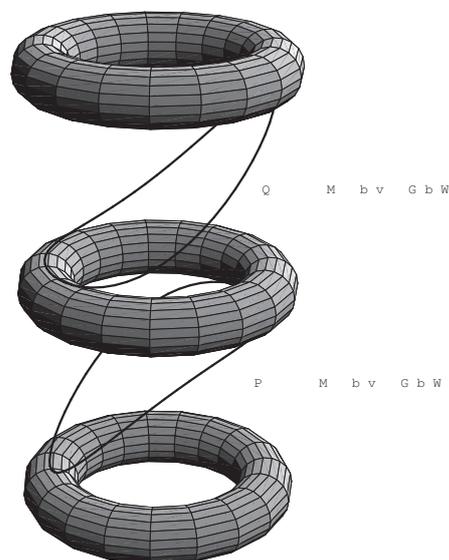


図 25: 図 24 のチューブの領域は $k_y = 0, 2\pi$ を同一視する事でトーラスとなる (磁氣的ブリルアンゾーン)。さらにエッジ状態は概念的にはエネルギーバンドからなるトーラスをつなぐ閉曲線となる。

は $\rho = \frac{1}{2}(\Delta - \sqrt{\Delta^2 - 4})$ より

$$k_x = 0, 2\pi/q$$

と対応する。つまり概念的には前節で示したエネルギーバンドの領域はブリルアンゾーンがトーラスであることに対応して図のような筒状の領域と考えられ $k_y = 0, 2\pi$ を同一視することでトーラスとなる。これより、チャーン数に寄与するブロッホ関数のゼロ点はバンド端のみに存在し、具体的にはエッジ状態がエネルギーバンドに縮退する点であたえられることとなる。エネルギーバンドの上端と下端からの寄与を少していねいに調べると下から j 番目のエネルギーバンドのチャーン数 c_j と j 番目と $j-1$ 番目のエッジ状態を与えるブロッホ関数のゼロ点の回転数の間に

$$c_j = I(C_j) - I(C_{j-1})$$

という関係式が成り立つことがわかる。(微積分の基本定理 $\int_a^b dx f'(x) = f(b) - f(a)$ のアナログ) によって ($I(C_0) = 0$ に注意して)

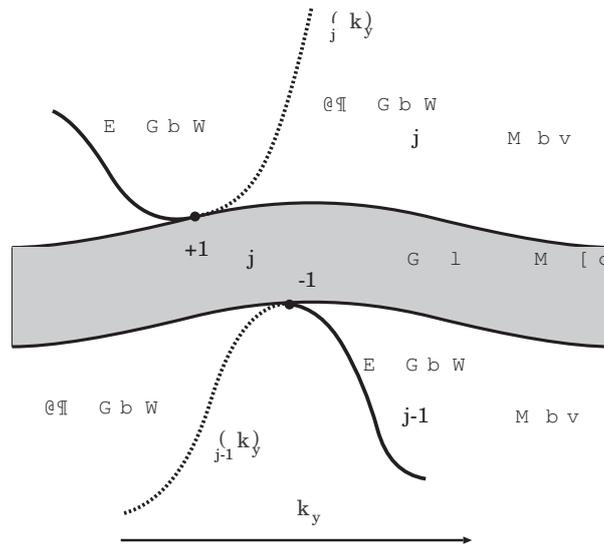


図 26: エッジ状態がエネルギーバンドに接するところでチャーン数を与える渦を与える。エネルギーバンドの上端、下端での接点で波動関数を展開すれば前節で説明したワインディング数 (交点数) とチャーン数の関係が与えられる。

エッジとバルク

$$\begin{aligned}
 \sigma_{xy}^{j,\text{bulk}} &= -\frac{e^2}{h} \sum_{\ell=1}^j c_{\ell} = -\frac{e^2}{h} \sum_{\ell=1}^j \left(I(C_j) - I(C_{j-1}) \right) \\
 &= -\frac{e^2}{h} I(C_j) \\
 &= \sigma_{xy}^{j,\text{edge}}
 \end{aligned}$$

すなわち二つのトポロジカルな整数は等しい。つまりホール伝導度はバルクで考えてもエッジで考えても等しいこととなる [19]。

4 分数と整数

以上整数量子ホール効果に関する位相幾何学的記述について説明してきたが、この節で分数量子ホール効果との関連を説明したい。本質的には分数量子ホール効果を整数量子ホール効果に帰着させることを試みる。その過程でいくつかの重要な概念を学ぶこととなる。

4.1 Berry Phase

磁場中の運動に典型的に現れる波動関数の位相の重要性は Berry の断熱過程における波動関数の位相の解析をきっかけとして「幾何学的位相」として重要な概念となった。[31, 32, 35, 36] この幾何学的位相についてここで簡単にまとめておきたい。

まず、ハミルトニアンがあるパラメーター \vec{R} に依存するとしよう。

$$H = H(\vec{R})$$

一方各パラメーター \vec{R} も時間依存性を持ち得るとして各時間ごとの (スナップショット) ハミルトニアンの固有値問題を

$$H(\vec{R})|n(\vec{R})\rangle = E_n(\vec{R})|n(\vec{R})\rangle$$

とする。このとき初期条件

$$|\Psi(t=0)\rangle = |n(\vec{R}(t=0))\rangle$$

を満たすシュレディンガー方程式の解 $|\psi\rangle$ はすべての時間で E_n が離散スペクトルに属しており、ハミルトニアンの時間依存性が十分ゆっくりしている場合には断熱定理により、

$$H(\vec{R})|\Psi\rangle = E_n(\vec{R})|\Psi\rangle$$

をみたす。よって縮退のない場合

$$|\Psi\rangle = e^{i\theta}|n(\vec{R})\rangle$$

と位相のみ変化する事となる。この位相に重要な物理的意味の存在することを Berry は指摘したのである。この表式をシュレディンガー方程式 $i\hbar\dot{|\Psi\rangle} = H|\Psi\rangle$ に代入すれば²⁷

$$\begin{aligned} |\Psi\rangle &= e^{-\frac{i}{\hbar} \int dt E_n} e^{i\gamma} |n(\vec{R})\rangle \\ \gamma &= i \int d\vec{R} \cdot \langle n | \vec{\nabla} n \rangle \end{aligned}$$

この γ を Berry Phase といい、幾何学的位相の典型例である。²⁸

²⁷

$$\begin{aligned} i\hbar \left(i\dot{\theta}|n\rangle + |\dot{n}\rangle \right) &= E_n |n\rangle \\ -i\hbar\dot{\theta} + i\hbar\langle \dot{n} | n \rangle &= E_n \\ \theta &= i \int dt \langle n | \dot{n} \rangle - \frac{1}{\hbar} \int dt E_n \\ &= i \int d\vec{R} \cdot \langle n | \vec{\nabla} n \rangle - \frac{1}{\hbar} \int dt E_n \end{aligned}$$

²⁸M.V. Berry, Proc. R. Soc. Lond. A 392, 45 (1984)

これを磁場中の電子の運動に適用してみよう。空間 \vec{R} における電子系をベクトルポテンシャル中で断熱的に移動させることを考えよう。まず \vec{R} 周りの物理系のハミルトニアンとして

$$H(\vec{p} + \frac{e}{c}\vec{A}, \vec{r} - \vec{R}(t))$$

を考える。そこでまずベクトルポテンシャルのない場合の固有値問題が解けているとして

$$H(\vec{p}, \vec{r} - \vec{R})|n_0(\vec{R})\rangle = E_n|n_0(\vec{R})\rangle$$

とするとベクトルポテンシャルのある場合のハミルトニアン $H(p + \frac{e}{c}\vec{A})$ に対するスナップショットの固有値問題

$$H(p + \frac{e}{c}\vec{A})|n(\vec{R})\rangle = E_n|n(\vec{R})\rangle$$

の解は

$$|n(\vec{R})\rangle = e^{-i\frac{e}{\hbar c} \int_{\vec{R}}^{\vec{r}} d\vec{r} \cdot \vec{A}(\vec{r})} |n_0(\vec{R})\rangle$$

となる。²⁹ よって³⁰

$$\begin{aligned} i\gamma &= - \int d\vec{R} \cdot \langle n | \vec{\nabla}_R \rangle \\ &= -i\frac{e}{\hbar c} \int d\vec{R} \cdot \vec{A}(\vec{R}) + \langle n_0 | \vec{\nabla}_R n_0 \rangle \end{aligned}$$

ベクトルポテンシャルの存在により

$$e^{-i\frac{2\pi}{\Phi_0} \int d\vec{R} \cdot \vec{A}(\vec{R})}$$

だけ余分な位相変化を受けることとなる。特に \vec{R} が閉曲線 ∂S を作る場合その位相変化は

$$\begin{aligned} \gamma &= -2\pi \frac{\Phi}{\Phi_0} \\ \Phi &= \int_S d\vec{S} \cdot \vec{B}, \quad \vec{B} = \text{rot } \vec{A} \end{aligned}$$

となる。

²⁹

$$\begin{aligned} (\vec{p} + \frac{e}{c}\vec{A})|n(\vec{R})\rangle &= (\hbar\frac{\vec{\nabla}}{i} + \frac{e}{c}\vec{A})|n(\vec{R})\rangle \\ &= -\frac{e}{c}\vec{A}(\vec{r})|n(\vec{R})\rangle + e^{-i\frac{e}{\hbar c} \int_{\vec{R}}^{\vec{r}} d\vec{r} \cdot \vec{A}(\vec{r})} \vec{p}|n_0(\vec{R})\rangle + \frac{e}{c}\vec{A}|n(\vec{R})\rangle \\ &= e^{-i\frac{e}{\hbar c} \int_{\vec{R}}^{\vec{r}} d\vec{r} \cdot \vec{A}(\vec{r})} \vec{p}|n_0(\vec{R})\rangle \\ H(\vec{p} + \frac{e}{c}\vec{A})|n(\vec{R})\rangle &= e^{-i\frac{e}{\hbar c} \int_{\vec{R}}^{\vec{r}} d\vec{r} \cdot \vec{A}(\vec{r})} |n_0(\vec{R})\rangle \end{aligned}$$

³⁰

$$\begin{aligned} i\gamma &= - \int d\vec{R} \cdot \langle n | \vec{\nabla}_R \rangle \\ &= -i\frac{e}{\hbar c} \int d\vec{R} \cdot \vec{A}(\vec{R}) + \langle n_0 | \vec{\nabla}_R n_0 \rangle \\ &= -i\frac{2\pi}{\Phi_0} \int d\vec{R} \cdot \vec{A}(\vec{R}) + i\gamma_0 \end{aligned}$$

4.2 分数統計粒子

分数量子ホール効果の議論並びに今後の議論において重要な分数統計粒子についてここで議論したい。これは幾何学的位相のもっとも初期の重要な例であり、統計変換等の関連で多体問題においてもいくつかのおもしろい応用がある [33, 34, 35]。

量子力学においては同種粒子多体系を考えよう。この系のハミルトニアン $H(\{\vec{r}_j\})$ は粒子の座標を $\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N$ としたとき粒子 i, j を入れ替える演算子 P_{ij} として入れ換えに対して不変であるから

$$[H, P_{ij}] = 0$$

を満たす。これより N 粒子系の多粒子系の波動関数 $\Psi(\{\vec{r}_j\})$ として H と P_{ij} の同時固有状態がとれる。さらに粒子分布密度 $|\Psi|^2$ は入れ換えで不変であるから P_{ij} の固有値は絶対値が 1 となる。

$$\Psi(\dots, \vec{r}_i, \dots, \vec{r}_j, \dots) = e^{i\theta} \Psi(\dots, \vec{r}_j, \dots, \vec{r}_i, \dots)$$

ここで一般の次元においては粒子を 2 度入れ替える操作はなにもしないことと同じ（連続に変形できる）ので波動関数それ自身に対しても不変であることを要求する。（よりていねいな議論は経路積分による。時間があれば講義では説明したい）よって $P_{ij}^2 = 1$

$$e^{i\theta} = \pm 1$$

この 2 つがボーズ統計、フェルミ統計に対応する。つまり一般の次元ではこれらの 2 つの統計しか許されない。

一方空間 2 次元においては、右回りに粒子を入れ替える操作と左回りに入れ替える操作は (2 次元平面内では) 連続に変形できず、異なるものと考えられ $P_{ij}^2 \neq 1$ としてもよい。これに対応して

$$\text{統計角 } \theta = \text{任意}$$

となる。これらの統計に従う粒子系を分数統計粒子系、Anyon と呼ぶ。

$$\frac{\theta}{\pi} = \begin{cases} 0, \pm 2, \pm 4, \dots & \text{ボーズ粒子系} \\ \pm 1, \pm 3, \dots & \text{フェルミ粒子系} \end{cases}$$

となる。

この分数統計にしたがうある粒子が他の粒子のまわりを一周する過程を考えるとこの過程が粒子の入れ替え 2 回と等価であることに注意すると、一周する過程での位相変化は $e^{i2\theta}$ であることを注意しておく。

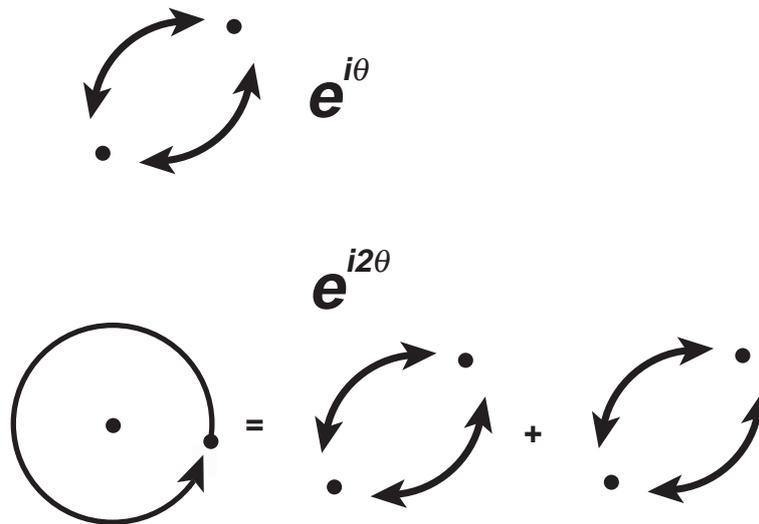


図 27: 分数統計 (Anyon) と分数統計粒子がお互いを囲んで運動したときの位相変化

この粒子の統計に起因する位相を Aharonov-Bohm 効果による (Berry Phase) ものと考え、分数統計粒子 (Anyon) は粒子と磁束の管の複合粒子と考えることができる。さらにこれらの分数統計粒子系を経路積分により記述するとこの磁束の管からの AB 効果は古典的運動方程式には影響を与えない、時間の全微分、いわゆるトポロジカル項を Lagrangian に付加することにより記述されることがわかる。(時間があれば Web でアップします。)

4.3 磁束の切り張り (Composite Fermion, 1/2 Fermi Liquid 状態, Anyon 超伝導...)

N_e 個粒子密度 ρ の θ 分数統計粒子がブラケット当たり ϕ の磁場の下にある状況を考えよう。このときある粒子が面積 S の閉曲線を囲む運動をする過程を考える。この過程において分数統計の効果で波動関数の位相が変化する効果を取り込むことを考える。正確には粒子をいくつ囲んだかに依存するわけだが、まず、ここでは平均としての位相の効果を議論しよう [35]。

粒子の囲む面積が S であった場合、平均的にはこの面積中に粒子は $N_e = \rho S$ 個あり、一つの粒子当たり移動した粒子とのペアあたり、 2θ の位相変化を受けるので全体としては統計性からの寄与として $2\theta N_e$ の位相変化を受けることとなる。

更に一様磁場からの位相への寄与は $2\pi\phi S = 2\pi N_\phi$ の位相変化をうけるので総計この過程において

$$2\theta N_e + 2\pi N_\phi = 2\pi N_e \left(\frac{\theta}{\pi} + \frac{1}{\nu} \right), \quad (\nu = \frac{N_e}{N_\phi})$$

の位相変化を受けることとなる。

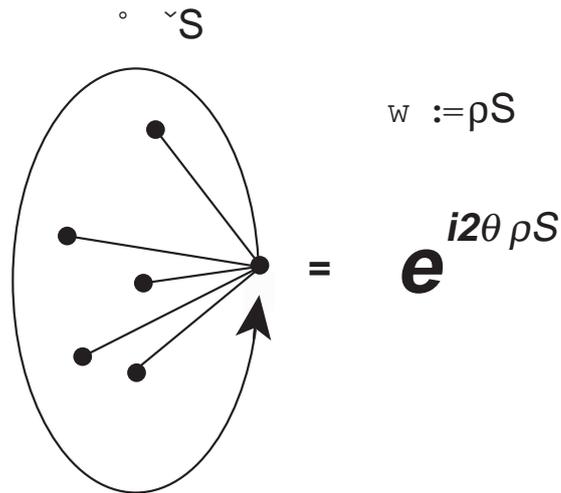


図 28: 磁場中の分数統計粒子系の平均場近似

ここで次の仮定を置こう。

Adiabatic Heuristic Argument: (Jain, Wilczek) [24, 35]³¹

全磁束が変化しない過程においては少なくとも長距離の物理は変化しない。

これを信じれば次の微分方程式の解として得られる系は断熱的につながっていることとなり長距離の物理に関しては同等となる。つまり分数統計を与える仮想的な磁束と実際の磁束とをその総和を一定としてやりとり (切り張り) しても物理の本質は変わらないと主張するのである。(どのような状況でこの仮定が本当に正当化できるのか、エネルギーギャップの存在、相互作用、特異点の保存、その他この点の議論が本質的に重要である。)

Adiabatic heuristic: 磁束のやりとり

$$d\left(\frac{\theta}{\pi} + \frac{1}{\nu}\right) = 0$$

の系は断熱的に連続である。

(これは非常に強い仮定であり、必ずしも成立するわけではないが、種々の場合にこの概念で議論できる物理系も多いのである。)

ここで ν は系が量子ホール効果を示す場合には通常のランダウ準位の占有率となる。

この主張に従い、 $\theta = -\pi$ (通常のフェルミ統計に従う電子) $\nu = n$:整数 すなわち普通の整数量子ホール状態 $\sigma_{xy} = n \frac{e^2}{h}$ を含む系列を考えよう。具体的には上記微分方程式の $\theta = -\pi, \nu = n$ を通る解曲線を求めてみる。この解曲線は容易にわかるとおり $\frac{\theta}{\pi} + \frac{1}{\nu} = -1 + \frac{1}{n}$ と $-1/\nu - \theta$ 図上で直線であらわされる。この直線上に重要な系が含まれているのである。

³¹Jain, Phys. Rev. Lett. 63, 199, (1989)

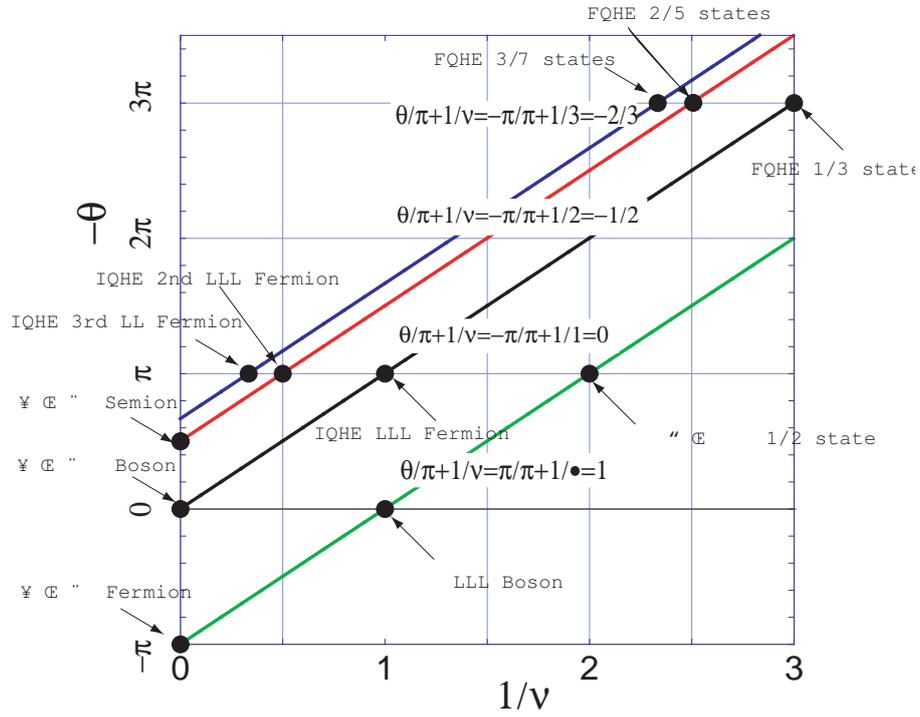


図 29: 断熱原理による種々の物理系の整理

ここで $\theta = -m\pi$ (m は奇数の場合) を考える。つまり 2 粒子を入れ替えたときの位相が $e^{-im\pi} = -1$ であるから粒子系はやはりふつうのフェルミ統計に従う電子系に断熱的につながる系をを考慮するのである。このときのランダウ準位の占有率は

$$\nu = \frac{n}{(m-1)n+1}$$

となるが、分母の $(m-1)n+1$ は奇数であり、これが分数量子ホール効果をおこす状態であると考えるのである。(Jain の構成法)。すなわち分数量子ホール効果をおこす系は整数量子ホール効果の系と長距離の物理に関しては同等であると主張する。

もう一つのコメントとして $n = 1$ の場合、この直線は原点を通るすなわち、 $\theta = 0, \frac{1}{\nu} = 0$ ($N_\phi = 0$): 磁場のない(ハードコア)ボゾン系をもその系列に含む。よって $\nu = 1/m$ 状態は磁場のない(ハードコア)ボゾン系に帰着することをも主張する。(2次元ハードコアボゾン系での Quasi Long Range Order をここでの議論から量子ホール効果におけるものへ読み直すことができる。ただそこにてくる相関関数は近距離の演算子の 2 体相関という形ではなく切り張りした磁束の効果を取りこむために”ストリング”型の長距離なものとなる。量子ホール効果においては系にエネルギーギャップがあるため通常の(準)長距離秩序の形成は起こらないが、ストリング型の秩序変数は基底状態の波動関数の位相の構造をうまく拾い出していると考えられることができよう。この点で次元さえ異なるが 1 次元整数スピン系 (Haldane 系) でのストリング秩序との類似に注意しておきたい。)

さらに磁場のない系は、 $\nu = \infty$ と考えられるのでこの系を含む系列を考えるとこの系は

$$\nu = \frac{1}{2}$$

状態を含むと考えられ、これがフェルミ液体的状態であることを支持する。

以上 Adiabatic Heuristic の議論に従い断熱的につながると考えられるいくつかの系列をまとめてみよう。

1. $\theta = -\pi$, $\nu = 1$ を含む系列。

- 磁場のない系のボーズ粒子
- 最低ランダウ準位を完全に埋めた整数量子ホール状態 $\nu = 1$
- 分数数量子ホール状態 $\nu = 1/3, 1/5, 1/7 \dots$ [24]

2. $\theta = -\pi$, $\nu = 2$ を含む系列。

- 磁場のない $\theta = \pi/2$ 分数統計粒子系 (セミオン) (RPA 計算等によりで超伝導状態であるとされている [?, 39].)
- ランダウ準位を 2 つ完全に埋めた整数量子ホール状態 $\nu = 2$
- 分数数量子ホール状態 $\nu = 2/5$

3. $\theta = -\pi$, $\nu = 3$ を含む系列。

- ランダウ準位を 3 つ完全に埋めた整数量子ホール状態 $\nu = 3$
- 分数数量子ホール状態 $\nu = 3/7$ [24]

4. $\theta = -\pi$, $\nu = 5$ を含む系列。

...

5. $\theta = -\pi$, $\nu = \infty$ を含む系列。

- 偶数分母状態 $\nu = 1/2$ [37]
- ランダウ準位を 1 つ完全に埋めたボーズ粒子系
- 磁場なしフェルミオン系 (自由フェルミ粒子系)

4.4 もう一つの分数統計, 排他的分数統計

量子ホール効果においては先ほどでてきた Anyon としての分数統計の他にパウリの排他律を拡張した排他的分数統計があらわれ、これも面白い [40, 41]。

これについて少し議論してみよう。

まず、フェルミ粒子とボーズ粒子の異なるところを振り返ってみれば、多粒子系の波動関数が粒子の入れ換えについてどのように振る舞うかがあり、これに関しては、よく知られており、その拡張が、いわゆる Anyon であったわけである。

特にフェルミ粒子系に対しては、この入れ換えの位相の効果は「フェルミ粒子は同一の状態には 1 つの粒子しか存在できない」というパウリの原理として知られる厳しい条件を要求することもよ

く知られているであろう。具体的にはたとえば、10 サイトの系において 4 個のフェルミ粒子が存在するときの状態数 (縮退度) は

$$W_F = \binom{10}{4} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{4!} = 210$$

であるが、ボーズ粒子系の場合は同一の状態にいくつでもはいれるから、いわゆる重複組み合わせとして $10+4-1$ 個のものを並べたものから 3 個の粒子の位置を選んで左から状態に対応させれば (|○|○|○| :5 サイトに ○ 3 個の例)

$$W_B = \binom{10+4-1}{3} = \frac{13 \cdot 12 \cdot 11}{3!} = 715$$

となり、フェルミ粒子とボーズ粒子を明らかに区別する。これを一般化しよう。まず、最初に D_0 個のサイトがあって今すでに N 個粒子があるとし、さらに次に導入しようとする粒子が占めうる可能な場合の数を $D(N)$ とする。するとフェルミ粒子の場合はすでに占められているところにはパウリの原理で入ることができないので $D^F(N) = D^0 - N$, ボーズ粒子系の場合は他の粒子の存在に全く関係せず、 $D^B(N) = D^0$ となる。まとめて

$$\begin{aligned} \text{Fermion} : D^F &= D^0 - N = D^0 - 1 \cdot N \\ \text{Boson} : D^B &= D^0 = D^0 - 0 \cdot N \end{aligned}$$

となる。これを拡張して α (排他的) 統計粒子系においては

$$\begin{aligned} \alpha\text{-統計粒子系} : D^\alpha &= D^0 - \alpha \cdot N \\ \Delta D &= -\alpha \Delta N \end{aligned}$$

とすることで”統計”を拡張することを試みがありいくつかの興味深い系においてうまく記述できることがわかっている [40, 41]。

ここで少しこの議論を進めておこう。以下この拡張された α 統計粒子系からなるグランドカノニカル集団を考えよう。ただし粒子系が自由粒子であるとしその一粒子エネルギーを ϵ とし全エネルギーは

$$E = N\epsilon$$

となることを仮定しよう。まず、この系の縮退度は

$$W = \binom{D^\alpha(N) + N - 1}{N}$$

であるからエントロピー S は³²

$$S = D_0 n \left[(1+w) \ln(1+w) - w \ln w \right]$$

$$w = n^{-1} - \alpha$$

よって自由エネルギーは

$$F = E - TS - \mu N$$

$$= D_0 T n (\beta(\epsilon - \mu) - (1+w) \ln(1+w) + w \ln w)$$

これを使って $\frac{\partial F}{\partial n} = 0$ より³³ $w(\zeta)$ を

$$w(\zeta)^\alpha (1+w(\zeta))^{1-\alpha} = \zeta$$

$$w(\zeta) = \zeta - 1, \quad (\alpha = 0)$$

$$w(\zeta) = \zeta, \quad (\alpha = 1)$$

を満たす関数として

$$n = \frac{1}{w(e^{\beta(\epsilon-\mu)}) + \alpha}$$

となる。これはフェルミ分布とボーズ分布をつなぐ分布関数を与えることとなる。

より一般に種類の異なる粒子系が混在している場合に上記の議論を拡張し i -種粒子が $N_i, i = 1, 2, \dots$ 存在する場合に i -種粒子が次に占有可能な状態数を D_i としたとき、

$$D_i = D^0 - \alpha_{ij} \cdot N_j$$

と書き、”統計” を行列 α に拡張することも可能であり、次に示すように、量子ホール効果における複合粒子系はこの拡張された統計に従うと考えられる。これを次に紹介しよう。

³²

$$S = \ln W$$

$$= \ln \frac{(D_0 + (1-\alpha)N)!}{N!(D_0 - \alpha N)!} = (D_0 + (1-\alpha)N) \ln(D_0 + (1-\alpha)N) - N \ln N - (D_0 - \alpha N) \ln(D_0 - \alpha N)$$

$$s = \frac{S}{D_0} = (1 + (1-\alpha)n) \ln(n^{-1} + (1-\alpha)) - n \ln 1 - (1-\alpha n) \ln(n^{-1} - \alpha), \quad n = \frac{N}{D_0}$$

$$= n \left((1+w) \ln(1+w) - w \ln w \right)$$

$$w = n^{-1} - \alpha$$

³³

$$n \frac{\partial w}{\partial n} = -\frac{1}{n} = -(w + \alpha)$$

$$\frac{1}{TD_0} \frac{\partial F}{\partial n} = \beta(\epsilon - \mu) - (1+w) \ln(1+w) + w \ln w - n \frac{\partial w}{\partial n} \ln \frac{1+w}{w}$$

$$= \beta(\epsilon - \mu) - (1+w) \ln(1+w) + w \ln w + (w + \alpha) \ln \frac{1+w}{w}$$

$$= \beta(\epsilon - \mu) + (\alpha - 1) \ln(1+w) - \alpha \ln w$$

$$= \beta(\epsilon - \mu) - \ln(1+w)^{(1-\alpha)} w^\alpha = 0$$

$$e^{\beta(\epsilon-\mu)} = (1+w)^{(1-\alpha)} w^\alpha$$

4.5 排他的分数統計と量子ホール効果

まず整数量子ホール効果を考え、ランダウ準位をしたから2個考えよう。

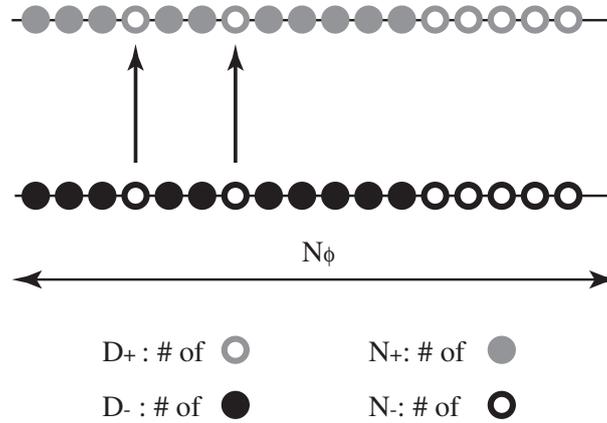


図 30: 量子ホール効果における準粒子、準正孔の排他的分数統計

この図のようにランダウ準位の縮退度が N_ϕ であるとき、電子が N_e 個あり図のような占有状況下を粒子 N_+ 個、正孔 N_- 個と記述する。この状況下でつぎに粒子を作るときその縮退度 D_+ 及び正孔を作るときその縮退度 D_- は

$$\begin{aligned} D_+(N_+, N_-) &= N_\phi - N_+ \\ D_-(N_+, N_-) &= N_\phi - N_- \\ N_\phi &= N_e + N_- - N_+ \end{aligned}$$

となる。これより拡張された (排他的) 統計行列は

$$\begin{aligned} \alpha_{++} &= \alpha_{--} = 1 \\ \alpha_{+-} &= \alpha_{-+} = 0 \end{aligned}$$

となり、粒子、正孔はフェルミ統計に従うこととなる。

この議論を Jain の Composite フェルミオン描像に適用することを考えよう。まず、 $\nu = 1/m$, $m : \text{odd}$ 状態においては系の磁束を粒子にすべて張り付けるとボーズ的になり、粒子あたり、 $m-1$ 本ずつ張り付けると残りの磁束と粒子の数が等しく、整数量子ホール効果として理解できたことを振り返ろう。よって電子数が少しだけ上記のマジック数からずれた状況においては

$$N_\phi = (m-1)N_e + N_\phi^{eff} \quad (*)$$

として与えられる N_ϕ^{eff} が実効的な系の磁束と考えられよう。ここで前述の整数量子ホール効果での議論をそのまま使って $N_f = N_e$ を Composite フェルミオンの数とすれば

$$\begin{aligned} N_\phi^{eff} &= N_f + N_- - N_+ \\ D_+^{eff}(N_+, N_-) &= N_\phi^{eff} - N_+ \\ D_-^{eff}(N_+, N_-) &= N_\phi^{eff} - N_- \\ N_\phi^{eff} &= N_f + N_- - N_+ \end{aligned}$$

となる。ここでの最後の式と (*) から表面にでない電子の数を消去すれば

$$N_{\phi}^{eff} = \frac{1}{m} N_{\phi} - (1 - \frac{1}{m}) N_{+} - (\frac{1}{m} - 1) N_{-}$$

よって

$$\begin{aligned} D_{+}^{eff}(N_{+}, N_{-}) &= \frac{1}{m} N_{\phi} - (2 - \frac{1}{m}) N_{+} - (\frac{1}{m} - 1) N_{-} \\ D_{-}^{eff}(N_{+}, N_{-}) &= \frac{1}{m} N_{\phi} - (1 - \frac{1}{m}) N_{+} - \frac{1}{m} N_{-} \end{aligned}$$

つまり、

$$\begin{aligned} \Delta D_{+}^{eff}(N_{+}, N_{-}) &= -(2 - \frac{1}{m}) \Delta N_{+} - (\frac{1}{m} - 1) \Delta N_{-} \\ \Delta D_{-}^{eff}(N_{+}, N_{-}) &= -(1 - \frac{1}{m}) \Delta N_{+} - \frac{1}{m} \Delta N_{-} \end{aligned}$$

これは分数量子ホール効果における準粒子、準正孔は拡張された分数統計

$$\begin{pmatrix} \alpha_{++} & \alpha_{+-} \\ \alpha_{-+} & \alpha_{--} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 - \frac{1}{m} & \frac{1}{m} - 1 \\ 1 - \frac{1}{m} & \frac{1}{m} \end{pmatrix}$$

に従うことを意味する。

5 量子相転移と Dirac Fermion

5.1 量子相転移と (隠れた) ディラックフェルミオン

ホール伝導度が不連続に変化するホールプラトー転移は量子相転移の典型的な例であり種々の研究が行われている。ここではこの転移においてはある種 Hidden な Dirac Fermion が重要な役割を果たすことを説明したい。

(時間の都合上現在ノートはできてません。講義で説明したいと思いますが、場合によってはノートをホームページにアップするかもしれません。)

ここでは図だけ説明なしにいくつか示しますので想像してみてください。 [73, 74]

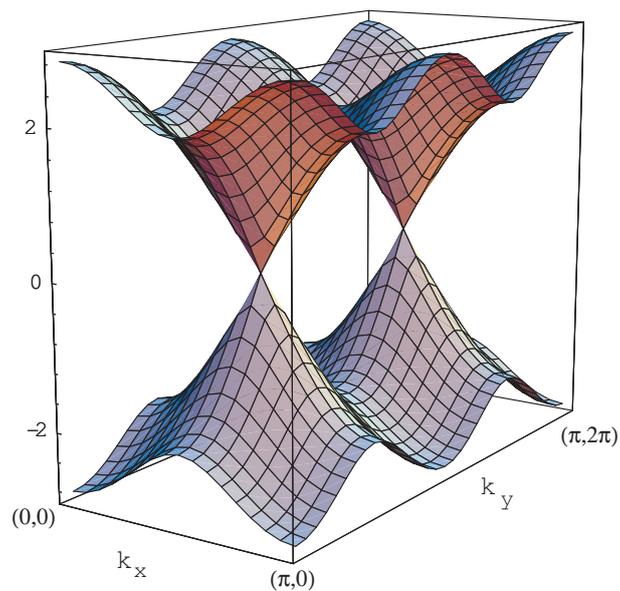


図 31: $\phi = \frac{1}{2}$ の場合のエネルギー分散。ディラックフェルミ粒子型の分散が2カ所見える。

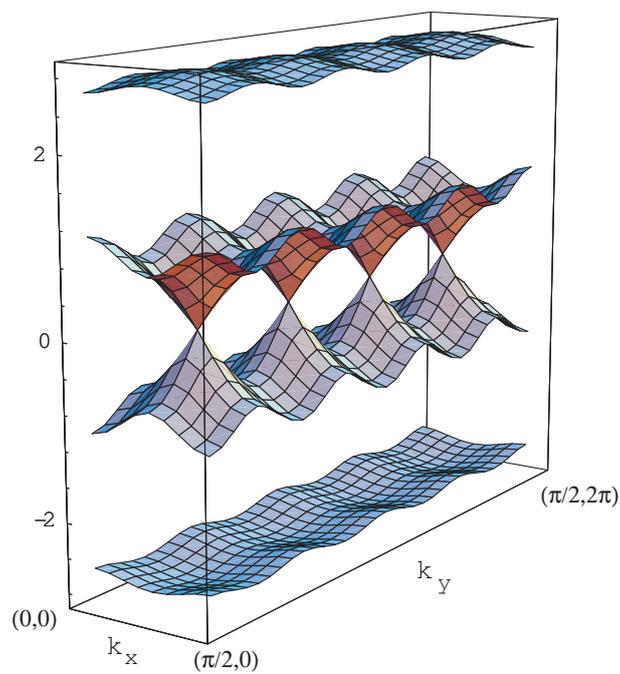


図 32: $\phi = \frac{1}{4}$ の場合のエネルギー分散。ディラックフェルミ粒子型の分散が4カ所見える。

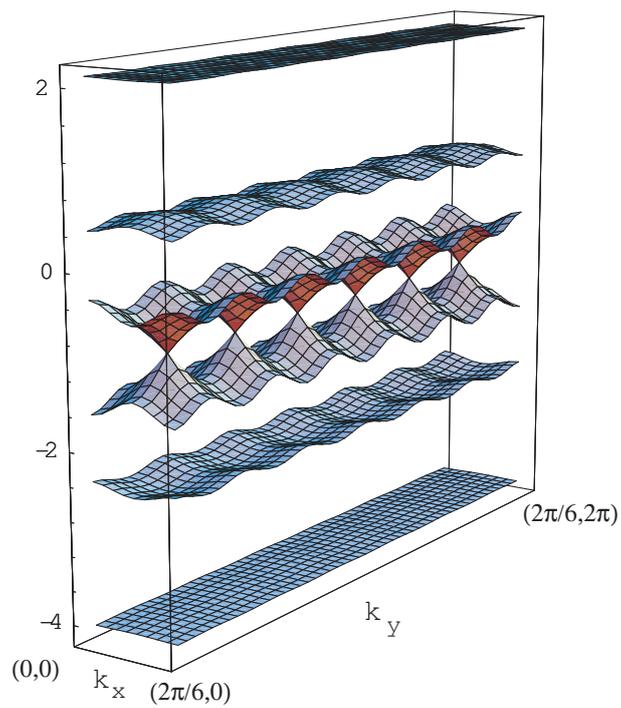


図 33: $\phi = \frac{1}{6}$ の場合のエネルギー分散。ディラックフェルミ粒子型の分散が 4 カ所見える。

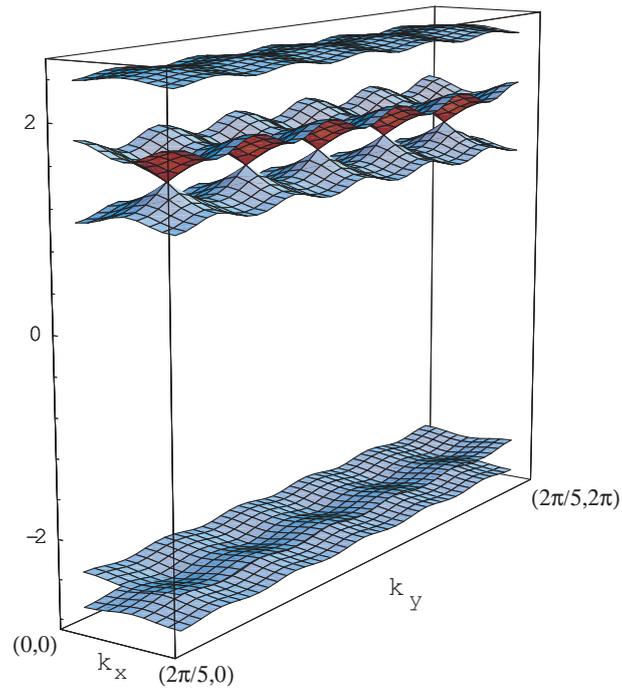


図 34: $\phi = \frac{1}{5}$ の場合のエネルギー分散。ディラックフェルミ粒子型の分散が 5 カ所見える。奇数個のディラック粒子?

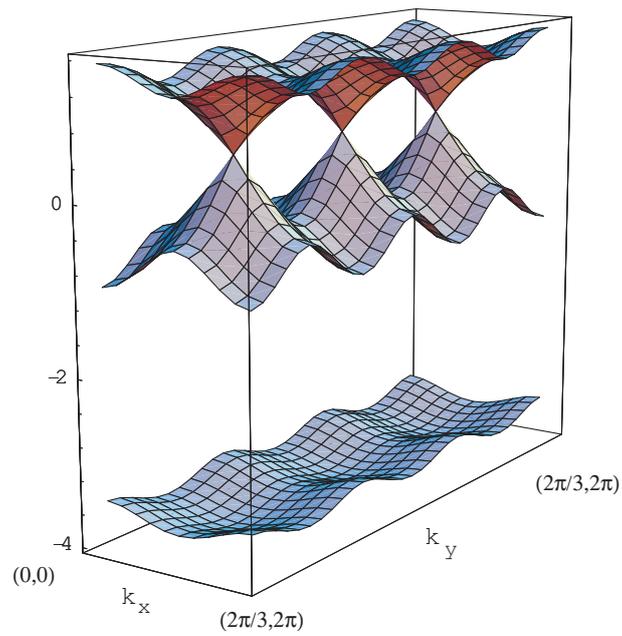


図 35: $\phi = \frac{1}{3}$ の場合のエネルギー分散。ディラックフェルミ粒子型の分散が 5 カ所見える。

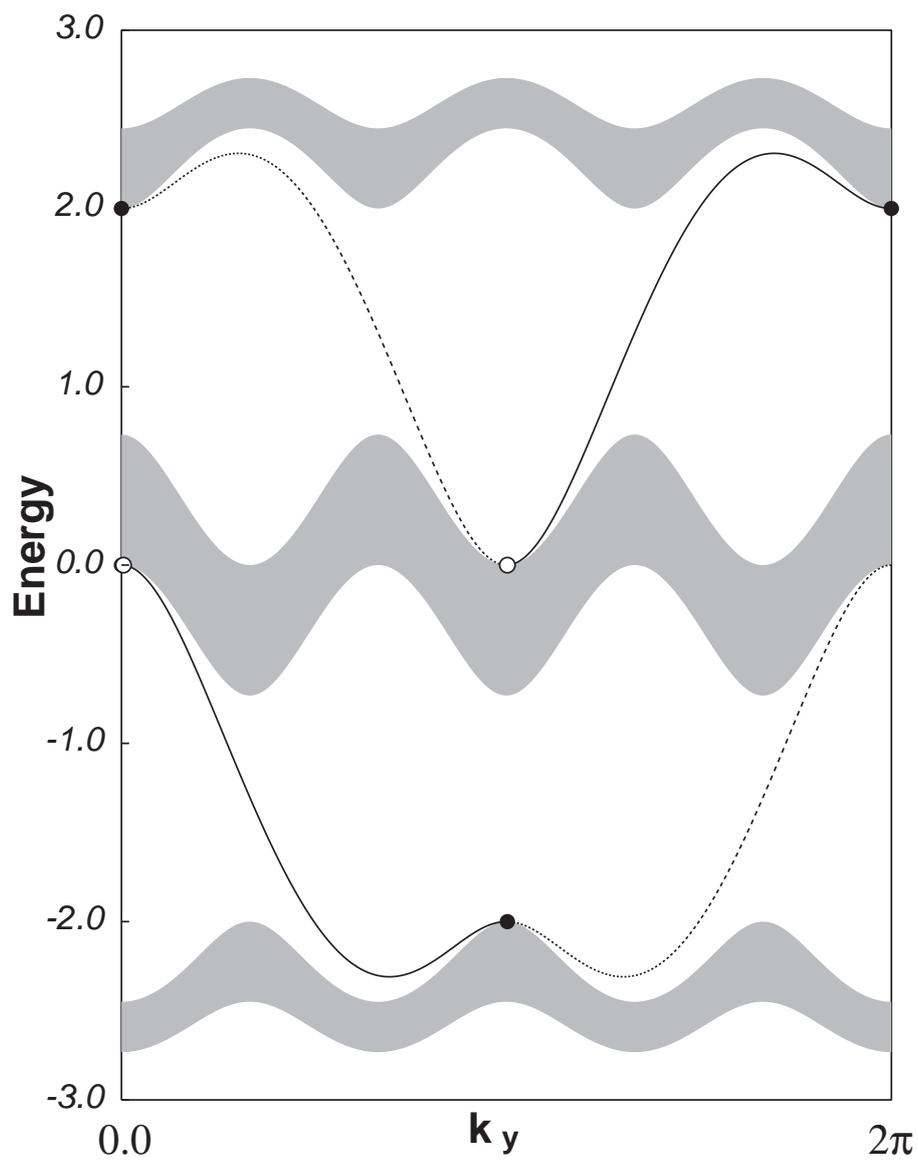


図 36: $\phi = \frac{1}{3}$ の場合のエッジ状態とチャーン数に寄与する vortex

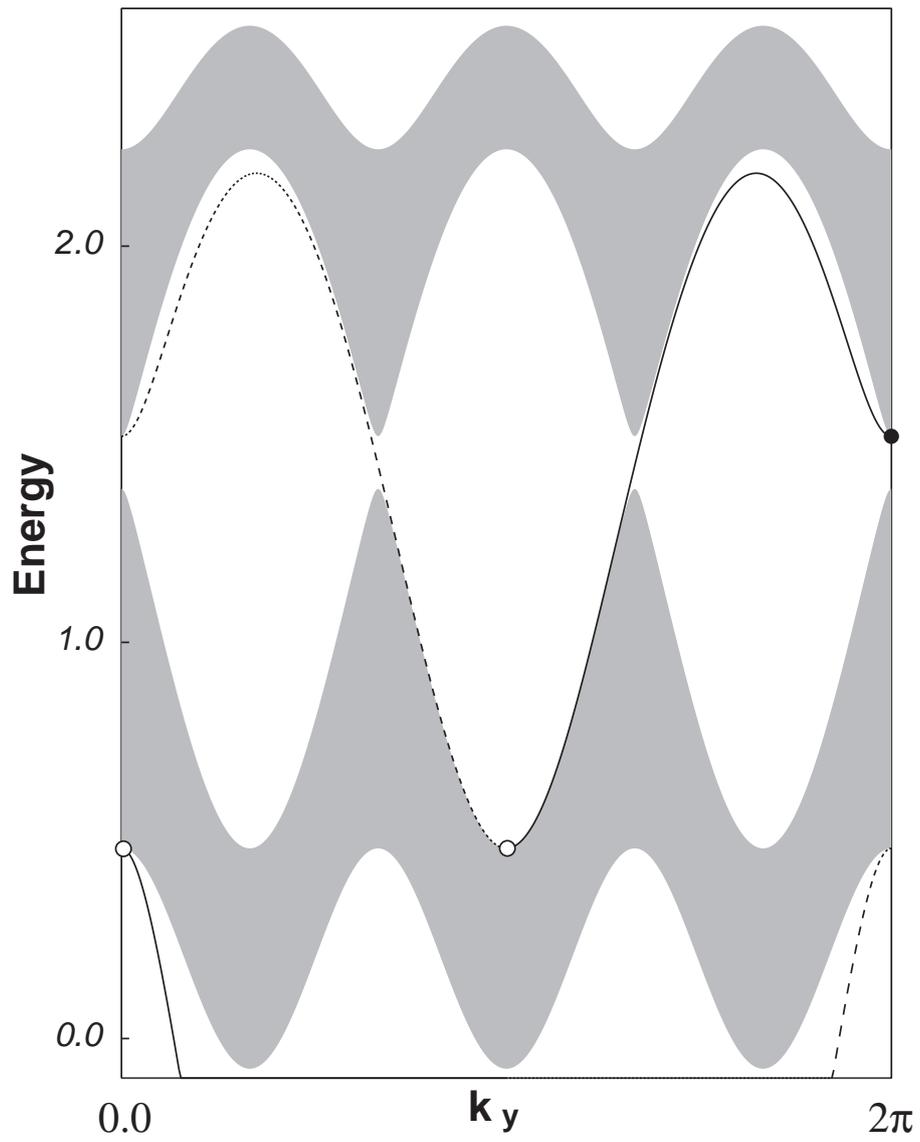


図 37: $\phi = \frac{1}{3}$ の場合のエッジ状態とチャーン数に寄与する vortex (NNN 模型)

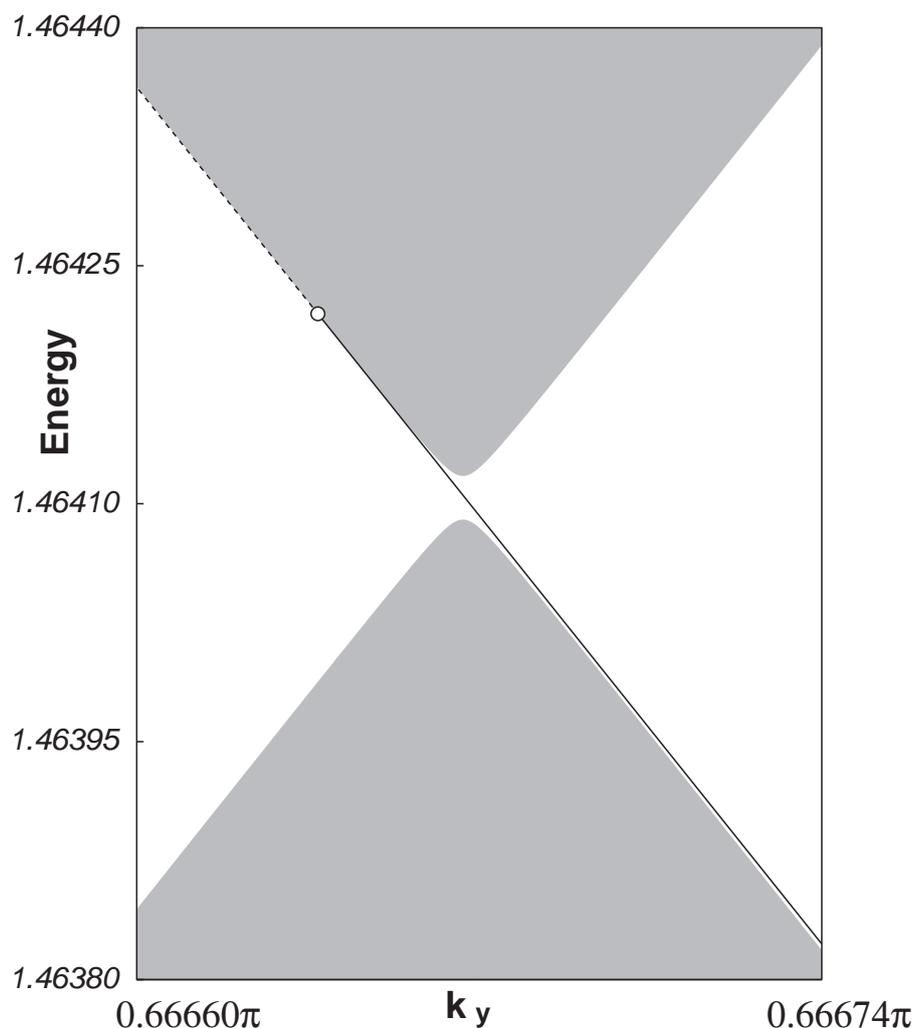


図 38: 量子臨界点近傍でのエッジ状態とチャーン数に寄与する vortex (NNN 模型)。 $\phi = \frac{1}{3}$ の場合

5.2 ランダム系における位相不変量の意義、ゼロモード、非局在状態のフローティング等、最近の話題

(時間の都合上現在ノートはできてません。講義で説明したいと思いますが、場合によってはノートをホームページにアップするかもしれません。) [77, 78, 79]

5.3 時間反転対称性を破る超伝導とスピンホール伝導度の量子化、束縛状態、双対性

(時間の都合上現在ノートはできてません。講義で説明したいと思いますが、場合によってはノートをホームページにアップするかもしれません。)

ここでは図だけ説明なしにいくつか示しますので想像してみてください。[80, 81]

6 磁場中の電子系における幾何学的位相と量子群

6.1 イントロダクション

最初に触れたように磁場があると電子が運動する際に受ける位相変化がその履歴に依存する。例えば A によってから B にいくのと B によってから A にいくのとで位相が異なることとなる。一方量子群という新しい代数構造が数学、物理で最近話題となっているがそこでの一つの関係式は例えば

$$AB = qBA$$

等とかかれるがこの非可換性は $q = e^{i\phi}$ とすれば今議論してきた磁場中の電子系のものにいてる (と思いませんか)。この議論はただ似ているというだけでなく、実際使える段階まで現実的なものとしていろいろな研究があるわけです。

以下、時間の関係で以前数理科学に書いたものをかなりの部分再録しています [75]。

アハロノフ-ボーム効果やモノポールの量子化の議論等でわかるように、磁場の効果を量子力学に基づいて考える際、本質的なものは観測量 (オブザーバブル) である磁場 B ではなく、ベクトルポテンシャル A , $B = \text{rot}A$ である。たとえ磁場が局所的であってもベクトルポテンシャル A は、非局所的であり磁場中を電子が運動するとき、電子の波動関数は、その移動経路に依存する位相を受けることとなる。波動関数の位相は、 A 自身は観測量でないことに起因するゲージ変換による不定性を持つ。この位相により、アハロノフ-ボーム効果に代表されるようなゲージ変換によっても消去できない物理的効果をもたらされることがある。これが、いわゆる幾何学的位相の典型的な例である。また、より基本的には、二次元電子は一樣磁場中においては自由電子の分散関係とは全く異なる、ランダウレベルと言われる特異的な分散関係を形成することはよく知られているが、振り返って考えてみるとこれ自身大変不思議な事実である。さらに、固体中の電子系を考えると、固体中では、結晶からの周期的ポテンシャルの効果もあいまってよりいっそう多様な興味深い現象が生ずる。このような周期的ポテンシャル中にある二次元磁場中の電子系をモデル化して格子上の以下のような、タイトバインディングハミルトニアンを考えよう。

$$H = T_x + T_y + T_x^\dagger + T_y^\dagger \quad (1)$$

ここで、 x, y 方向への格子間隔あたりの並進演算子 T_x, T_y は、 $c_{m,n}$ を (m, n) サイトの電子の消滅演算子として

$$T_x = \sum_{m,n} c_{m+1,n}^\dagger c_{m,n} e^{i\theta_{m,n}^x}, \quad (2)$$

$$T_y = \sum_{m,n} c_{m,n+1}^\dagger c_{m,n} e^{i\theta_{m,n}^y}, \quad (3)$$

のように定義される。ここで位相因子 $e^{i\theta_{m,n}^{x,y}}$ は、ベクトルポテンシャル A に起因し、格子あたりの磁束 ϕ と

$$\begin{aligned} \text{rot}_{(m,n)}\theta &= \Delta_x \theta_{m,n}^y - \Delta_y \theta_{m,n}^x, \\ &= (\theta_{m+1,n}^y - \theta_{m,n}^y) - (\theta_{m,n+1}^x - \theta_{m,n}^x) = 2\pi\phi \end{aligned} \quad (4)$$

のように結びついている。ここで上述の経路に依存する位相因子に関する議論は、

$$T_y^\dagger T_x^\dagger T_y T_x |\Psi_{m,n}\rangle = e^{i2\pi\phi} |\Psi_{m,n}\rangle, \quad (5)$$

($|\Psi_{m,n}\rangle = c_{m,n}^\dagger |0\rangle$) と表現できる。ここで $T_y^\dagger T_x^\dagger T_y T_x$ の演算は、最小の格子のリンクをひとまわりすることに対応する。

この格子上の 2次元電子系のエネルギースペクトルは、格子あたりの磁束が $\phi = P/Q$ と有理数の時、 Q 個のエネルギーバンドからなることが知られている。すなわち、 ϕ を連続的に変化させたとき、エネルギースペクトルは、複雑な構造を示すことが期待される。これが、図 1 に示すような、Hofstadter のバタフライと呼ばれるものである。このスペクトルは図から予想されるように、フラクタル構造を持つことが知られている。更に、この系の電気伝導を考えたとき系のホール伝導度について、(1) ホール伝導度がある種の位相不変量でかけること、(2) 系の複素エネルギー面を考えると、それは Q 個のエネルギーバンドをブランチカットとする種数 $g = Q - 1$ のリーマン面であり、その上でのある種の回転数という位相幾何学的量が、ホール伝導度という具体的な、物理量をあたえていること、を指摘しておきたい。このように、上述の系は、フラクタル、位相幾何学といった数理と関連していることが知られていたが、更に量子群という代数的構造とも非常に強い関連があることが、近年の研究で明らかとなった。[43, 44, 45]

まず、磁束を表す $\theta_{m,n}^{x,y}$ を $\theta_{mn,n}^x = \pi\phi \cdot (m+n)$, $\theta_{mn,n}^y = -\pi\phi \cdot (m+n+1)$ とする。(これらは、関係式 (4) を満たす限り自由に選ぶ自由度があるが、これがゲージ対称性に対応する。) そこで、一粒子シュレディンガー方程式 (15 ページ参照) $H|\bar{\psi}\rangle = E|\bar{\psi}\rangle$, $|\bar{\psi}\rangle = \sum_{mn,n} \bar{\psi}_{m,n} c_{m,n}^\dagger |0\rangle$ を考えると、これは、以下のように書ける。

$$\begin{aligned} e^{i\pi\phi(m+n-1)} \bar{\psi}_{m-1,n} + e^{-i\pi\phi(m+n)} \bar{\psi}_{m+1,n} \\ + e^{-i\pi\phi(m+n)} \bar{\psi}_{m,n-1} + e^{i\pi\phi(m+n+1)} \bar{\psi}_{m,n+1} = E \bar{\psi}_{m,n} \end{aligned} \quad (6)$$

ここで、この方程式が、(1) $(m,n) \rightarrow (m+Q, n+Q)$, (2) $(m,n) \rightarrow (m+1, n-1)$ の変換 (並進) について不変であることからいわゆるブロッホの定理によって $\bar{\psi}_{m,n} = e^{ip_-(m-n)} e^{ip_+(m+n)} \psi_{m+n}(p_+, p_-)$, $\psi_{m+n}(p_+, p_-) = \psi_{m+n+2Q}(p_+, p_-)$ と書けることがわかる。ここで p_+ , p_- は、磁気運動量と呼ばれる。以下、考察を mid band 条件と呼ばれる特殊な運動量 $(p_+, p_-) = (\frac{\pi}{2}, 0)$ に限ろう。このとき、一粒子シュレディンガー方程式は、 q -パラメータを $q = e^{i\pi\phi} = e^{i\pi\frac{P}{Q}}$ として、

$$i(q^{-j} + q^{j+1})\psi_{j+1} - i(q^{j-1} + q^{-j})\psi_{j-1} = E\psi_j, \quad (7)$$

($\psi_{j+2Q} = \psi_j$) となる。なおここでいわゆる q -パラメータが導入され、これを通じて我々の問題と、量子群 (quantum group) が関連することになる。なお、我々は技術的理由で P と Q とは、互いに素な奇数であると仮定するので $q^Q = e^{i\pi P} = -1$, $q^{2Q} = 1$ なる関係があることを注意しておく。前述の Hofstadter のバタフライは、固有値方程式 (7) の固有値を $Q = 401$, $P = 1, 3, \dots, Q-2$ に対してプロットしたものである。ここで、基底の周期性に注意するとこの固有値方程式は、次の $2Q$ 次元の行列 $H_{mid\ band}$ の固有値問題と読み直せる。

$$H_{mid\ band} = i(q - q^{-1})^{-1}(B_C + C_C) \quad (8)$$

$$B_C = -(q - q^{-1})^{-1}(X - X^{-1})Y, \quad (9)$$

$$C_C = -(q - q^{-1})^{-1}Y^{-1}(X - X^{-1}) \quad (10)$$

ここで X, Y は、

$$X = \begin{bmatrix} 0 & & & & 1 \\ 1 & 0 & & & \\ 0 & 1 & 0 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (11)$$

$$Y = \text{diag}(q^1, q^2, \dots, q^{2Q}) \quad (12)$$

であり、以下の関係式を満たす。

$$X^{2Q} = Y^{2Q} = I_{2Q}, \quad (13)$$

$$qXY = YX, \quad X^T = X^{-1}, Y^T = Y \quad (14)$$

Wiegmann 等の重要な発見は、 B_C, C_C の他に次の 2 つの行列

$$A_C = q^{-(Q-1)/2} X^{-1}, \quad (15)$$

$$D_C = q^{(Q-1)/2} X, \quad (16)$$

を補うことにより構成される、 $\{A_C, B_C, C_C, D_C\}$ が量子群 $U_q(sl_2)$ の $2Q$ 次元のサイクリック表現となっており、それを用いて物理的なハミルトニアン $H_{mid\ band}$ が書き下し得ることに気がついた点にある。この意外な関連により以下述べるような物性物理の系と数理的構造との興味深い関連が認識されるに至ったのである。次の節では、我々に関連する範囲で、量子群 $U_q(sl_2)$ とそのいくつかの表現について具体的にまとめてみる。

6.2 量子群といくつかの表現

量子群は歴史的には可解模型、Yang-Baxter 方程式等との関連でその代数構造の研究により発見されてきたのであるが、ここでは古典的かつ最も基本的なリー環 sl_2 の q -変形として量子群 $U_q(sl_2)$ を考える。(予備知識はここでの議論に関する限り全くありません。書いてあることは直接の計算ですぐ確認できます。) まずリー環 sl_2 はよく知られているように、 $\{S^z, S^+, S^-\}$ の 3 つの生成子で生成され、これらは、

$$[S^+, S^-] = 2S^z, \quad [S^z, S^\pm] = \pm S^\pm \quad (17)$$

の関係式を満たす。対応して、その q -変形 $U_q(sl_2)$ は、 $\{A, B, C, D\}$ と 4 つの生成子で生成され、それらは、

$$AD = DA = 1, \quad (18)$$

$$AB = qBA, \quad BD = qDB, \quad (19)$$

$$DC = qCD, \quad CA = qAC, \quad (20)$$

$$[B, C] = \frac{A^2 - D^2}{q - q^{-1}}, \quad (21)$$

の関係式を満たす。(我々の問題は 2 次元磁場中の電子系の問題であり前節で述べたように、経路に依存する位相が重要であり、それは、 $q = e^{i\pi\phi}$ として $T_y T_x |\Psi_{m,n}\rangle = q^2 T_x T_y |\Psi_{m,n}\rangle$ と磁気並進操

作が非可換であることに典型的に現れている。この非可換性と上記の量子群の定義とのある種の類似を感じとれると思うが、実際その具体的な関連が以下に示すように明らかになったことになる。))

いわゆる古典極限 $q \rightarrow 1$ で、 $U_q(sl_2)$ は sl_2 へ退化するが、(この古典極限は、我々の問題では $\phi \rightarrow 0$ 、すなわち弱磁場の極限に対応する。) その対応は、

$$A, D \iff 1, \quad (22)$$

$$\frac{A-D}{q-q^{-1}} \iff S^z, \quad (23)$$

$$B \iff S^+, \quad (24)$$

$$C \iff S^-, \quad (25)$$

となる。例えば、 $[B, C] = (A+D) \cdot (A-D)/(q-q^{-1}) \rightarrow 2S^z$ である。このように、古典極限をとることは、簡単だが、逆に、意味のある q -変形を見つけるのには、長い歴史が必要であった訳である。(量子群としての数学的構造としては、ホップ代数としての構造が重要な訳だが、我々の議論には、今のところその有用性が使われていないのでその点は、ここでは議論しない。)

次にこれらのある表現について議論しよう。まずリー環 sl_2 については、 j を半奇整数 ($j = 0, 1/2, 1, 3/2, 2, \dots$) として、 $2j+1$ 次元の表現 $S_h^z|m\rangle = m|m\rangle$, $S_h^\pm|m\rangle = (j \mp m)|m \pm 1\rangle \propto |m \pm 1\rangle$ がある。ここで m は $S_h^+|j\rangle = S_h^-|-j\rangle = 0$ より、 $m = -j, -j+1, \dots, j-1, j$ となり、この性質により highest weight 表現といわれる。またこの表現は次のような、微分演算子によりあらわに実現されることが容易に確認できる。

$$S_h^z = z\partial_z - j, \quad S_h^+ = z(2j - z\partial_z), \quad S_h^- = \partial_z, \quad (26)$$

$$|m\rangle = z^{m+j} \quad (27)$$

さらに表現が highest weight 表現であることより有限の基底がとれて、これらの微分演算子は、 $\Psi(z) = z^{2j} + a_{2j-1}z^{2j-1} + \dots + a_1z + a_0$ という $2j$ 次の多項式に作用するとみなせることに注目しておこう。

さて、対応する q -変形した量子群の方にも対応する表現が知られている。それは、いわゆる q -差分演算子により関数 $\Psi(z)$ に作用する演算子として、次のように与えられる。

$$A_h \Psi(z) = q^{-j} \Psi(qz), \quad (28)$$

$$B_h \Psi(z) = (q - q^{-1})^{-1} z [q^{2j} \Psi(q^{-1}z) - q^{-2j} \Psi(qz)], \quad (29)$$

$$C_h \Psi(z) = -(q - q^{-1})^{-1} z^{-1} [\Psi(q^{-1}z) - \Psi(qz)], \quad (30)$$

$$D_h \Psi(z) = q^j \Psi(q^{-1}z). \quad (31)$$

これらの q -差分演算子はまた $\rho_h(B)z^{2j} = \rho_h(C)z^0 = 0$ を満たしこの表現はまた highest weight 表現といわれる。つまり、 $\Psi(z)$ としては $2j$ 次の多項式を考えればよいことになる。ちなみに

z^k , $k = 0, 1, \dots, 2j$ を基底とすると表現行列は次のようにあらわせる。

$$A_h : \text{diag}(q^{-j}, q^{1-j}, \dots, q^{j-1}, q^j) \quad (32)$$

$$D_h : \text{diag}(q^j, q^{-1+j}, \dots, q^{-j+1}, q^{-j}) \quad (33)$$

$$B_h : \begin{bmatrix} 0 & & & & 0 \\ [2j]_q & 0 & & & \\ 0 & [2j-1]_q & 0 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ 0 & & & [1]_q & 0 \end{bmatrix} \quad (34)$$

$$C_h : \begin{bmatrix} 0 & [1]_q & & & 0 \\ & 0 & [2]_q & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & [2j]_q \\ 0 & & & & 0 \end{bmatrix} \quad (35)$$

ここで、 $[n]_q$ は、いわゆる q -整数で次のように定義される。

$$[n]_q = \frac{q^n - q^{-n}}{q - q^{-1}}, \quad (36)$$

なお、これら q -整数は、古典極限 $q \rightarrow 1$ で通常の整数 $[n]_q \rightarrow n$ となる。

ここまでは、 sl_2 と $U_q(sl_2)$ とは、きわめてパラレルに議論でき、表現のレベルでも、 q -変形、古典極限により両者は対応がついていた。ここまでは、一般の q について議論できたわけであるが、 q が 1 のべき根の時には、対応する古典極限での対応物のない全く新しい状況が生じることが知られている。我々の 2 次元磁場中の電子系の場合は、 $q^{2Q} = 1$ であり、まさに、この 1 のべき根の場合に対応する。

いま $Q = 2j + 1$ として、 $2j + 1$ 次元の highest weight 表現を考える。このとき

$$\psi_k = \Psi(q^k) \quad (37)$$

により、新しい基底 $\{\psi_n | n = 1, 2, \dots, 2Q\}$ を定義する。この基底は、 q が、1 のべき根であることより、周期的 (cyclic) $\psi_{k+2Q} = \psi_k$ である。この基底に関して、具体的に上記の highest weight 表現の作用から導かれる関係式を書き下してみると、 $q^{2Q} = 1$ を用いて

$$A_C \psi_n = q^{-(Q-1)/2} \psi_{n+1}, \quad (38)$$

$$B_C \psi_n = (q - q^{-1})^{-1} (q^{n+1} \psi_{n+1} - q^{n-1} \psi_{n-1}), \quad (39)$$

$$C_C \psi_n = (q - q^{-1})^{-1} (q^{-n} \psi_{n+1} - q^{-n} \psi_{n-1}), \quad (40)$$

$$D_C \psi_n = q^{(Q-1)/2} \psi_{n-1}. \quad (41)$$

となる。この表現行列が、前節の終わりに示した、 $\{A_C, B_B, C_C, D_C\}$ となるわけである。この表現は、一般のサイクリック表現と呼ばれるもののある特殊な場合に対応する。この表現は、対応する古典極限がないものであり、量子群固有のものである。それが我々の物理系の問題と関連するわけである。このような、数学的な抽象的理論が、我々の物性理論における現実の物理と関連していることは、ある種の驚きである。

6.3 ブロツホ電子に対するベータ方程式

前節の議論を振り返ってみると量子群 $U_q(sl_2)$ の highest weight 表現から導かれたサイクリック表現の表現行列を用いて、我々の 2次元ブロツホ電子系の特定の運動量の点でのハミルトニアンが $H_{mid\ band} = i(q - q^{-1})^{-1}(B_C + C_C)$ と fitting されたとみなすことができる。そこで highest weight 表現は、多項式に作用する演算子であったことを思い出すと、この fitting の対応を逆に使って、我々のシュレディンガー方程式 (7) を関数方程式にまで以下の形に引き戻すことができよう。

$$\begin{aligned} i(q - q^{-1})(B_h + C_h)\Psi(z) &= \\ i(qz + z^{-1})\Psi(qz) - i(q^{-1}z + z^{-1})\Psi(q^{-1}z) &= E\Psi(z) \end{aligned} \quad (42)$$

これは、離散的な点のみで定義されていた、ブロツホ電子のシュレディンガー方程式を一般の複素変数 z に関する関数方程式にまで拡張できたことに対応する。関数方程式の解が求まれば、 $\psi_n = \Psi(q^n)$ として我々の問題の解も求まるわけである。ここで重要なことは、前節の議論から明らかなように $\Psi(z)$ は表現が highest weight 表現であったことに対応して、次数 $2j = Q - 1$ の多項式に限られることである。よって $Q - 1$ 個のゼロ点を z_m , $m = 1, 2, \dots, Q - 1$ とすれば

$$\Psi(z) = \prod_{m=1}^{Q-1} (z - z_m) \quad (43)$$

と因数分解できる。そこで (42) の両辺を $\Psi(z)$ で割ると

$$\begin{aligned} i(qz + z^{-1}) \frac{\prod_{m=1}^{Q-1} (qz - z_m)}{\prod_{m=1}^{Q-1} (z - z_m)} \\ - i(q^{-1}z + z^{-1}) \frac{\prod_{m=1}^{Q-1} (q^{-1}z - z_m)}{\prod_{m=1}^{Q-1} (z - z_m)} = E \end{aligned} \quad (44)$$

という式が得られるが、ここで右辺が z に依存しない定数であることに注意すると、一見左辺にある $z = z_m$ における $Q - 1$ 個の極の留数は、それぞれゼロでなければならない。この pole free の条件から方程式系

$$\frac{z_n^2 + q}{qz_n^2 + 1} = - \prod_{m=1}^{Q-1} \frac{qz_n - z_m}{z_n - qz_m}, \quad n = 1, \dots, Q - 1 \quad (45)$$

が得られる。この高次連立方程式は、ベータ方程式といわれる。この方程式の根を求めれば、我々の問題も解けることになるわけである。また定数項を比較することによりエネルギー E がベータ方程式の根 $\{z_m\}$ から

$$E = -i(q - q^{-1}) \sum_{m=1}^{Q-1} z_m. \quad (46)$$

と得られることもわかる。

6.4 ベータ方程式のあらわな解

前節で説明したベータ方程式は、高次連立方程式系であり、通常、具体的な解を得ることは、困難である。ところが、エネルギー $E = 0$ の場合特殊な理由により、そのあらわな解が得られた。この節では、このあらわな解について議論し、その物理的帰結についても考察したい。

まず、関数方程式 (42) から出発する。このとき、 $E = 0$ とすると、($E = 0$ が解の一つとなっていることは、まったく別の理由から知られている。) 少し書き直して

$$q(z^2 + q^{-1})\Psi(qz) = q^{-1}(z^2 + q)\Psi(q^{-1}z). \quad (47)$$

となる。ここで $z = iq^{+1/2}$ を代入してみよう。すると $(z^2 + q) = 0$ となるから、 $q(-q + q^{-1})\Psi(iq^{3/2}) = 0$ つまり $\Psi(iq^{3/2}) = 0$ となる。すなわち $iq^{3/2}$ が $\{z_m\}$ の一つであることがわかった。そこで更に $z = iq^{+5/2}$ としてみよう。すると $\Psi(q^{-1}z) = \Psi(iq^{3/2}) = 0$ となるので、 $q(-q^5 + q^{-1})\Psi(iq^{7/2}) = 0$ となり、 $q(-q^5 + q^{-1}) \neq 0$ なら $\Psi(iq^{7/2}) = 0$ 、すなわち $iq^{7/2}$ もまた $\{z_m\}$ の一つであることがわかる。この操作を繰り返すことにより、 $iq^{2m-1/2}$ 、 $m = 1, \dots, (Q-1)/2$ がすべて $\{z_m\}$ に含まれることがわかる。ここで m に関する制限は $\Psi(z)$ の前の数因子が消えないとの条件により生ずる。

同様の過程は、まず最初に $z = iq^{-1/2}$ として、左辺 = 0 とすることからも初められ、 $iq^{-2m+1/2}$ 、 $m = 1, \dots, (Q-1)/2$ も解の一部であることがわかる。最後に、これら 2 つの系統の解を比べると全て異なり、併せて方程式の次数と同じだけあることもわかるため、これで $\{z_m\}$ すべてがあらわな形で

$$z_m = \begin{cases} iq^{2m-1/2} = ie^{i2\pi\frac{E}{Q}(m-1/4)} & m = 1, \dots, (Q-1)/2. \\ iq^{-2m+1/2} = ie^{i2\pi\frac{E}{Q}(m-1/4)} & \end{cases} \quad (48)$$

と得られたことになる。面白いことに、これらは全て複素平面上で単位円上にある。そこで $z_m = e^{i\theta_m}$ とすれば θ_m はある種の運動量に対応し、 Q は、ある種の系の大きさに対応するとみなせる。そこで更に $\Delta\theta$ を隣接する θ_m の差と定義すると、ベーテ方程式の根の分布関数 $\rho(\theta) = \lim_{Q \rightarrow \infty} Q\Delta\theta$ が興味ある物理量となる。

以下次のような $Q \rightarrow \infty$ の 2 つの場合を考えてみる。(これは、ある種の熱力学極限と考えられるだろう。)(1) 古典極限, $q \rightarrow 1$ 。ただし、 $P = 1, Q \rightarrow \infty$ 。(2) Incommensurate 極限。単位格子あたりの磁束が無理数の場合。具体的には、 $\phi \rightarrow 1/\tau = (\sqrt{5}-1)/2$ (τ は黄金比)。この極限をとるために、フィボナッチ数 F_k , ($F_{k+1} = F_k + F_{k-1}$, $F_1 = 1, F_0 = 1$) からなる次のような磁束の系列を考える。 $\phi_k = P_k/Q_k$, $Q_k = F_{3k+1}$, $P_k = F_{3k}$ 。

まず、(1) の場合、この場合容易にわかるように、ベーテ方程式の解は、単位円の上で $\pm i$ をのぞいて一様に分布する。よって分布関数 $\rho(\theta) = \text{定数}$ 、となる。一方 (2) の Incommensurate 極限の場合、その分布は単純でないことはすぐわかるが、それ以上の知見を得るには次のように考えるのがよい。ベーテ方程式の根 (48) においては、 m に $m = 1, \dots, (Q-1)/2$ との制限があった。そこでこの制限を満たさないものを補助根と呼ぶことにし、制限を満たす、真の根とともに、プロットしたものを図に示す。

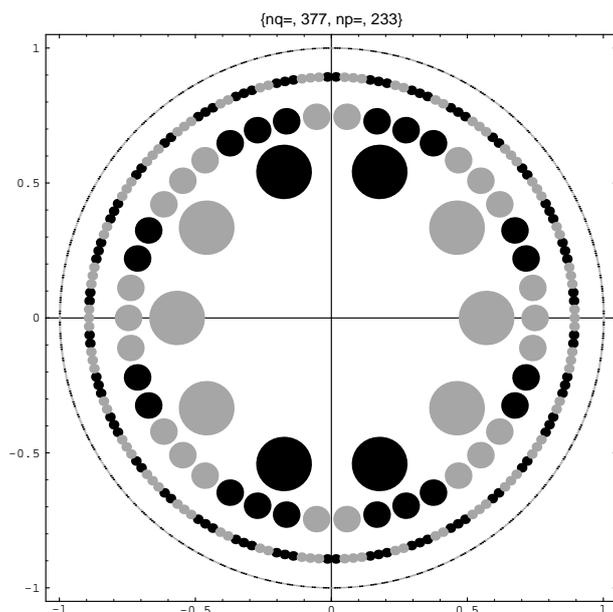


図 39: 解析的に得られたベータ方程式の複素平面上での根。 $\phi = 1/\tau$ の近似有理分数として、 $3/5, 13/21, 55/89, 233/377, \dots$ に対して具体的に示した。(半径は、近似の粗いものほど小さくスケールした。)

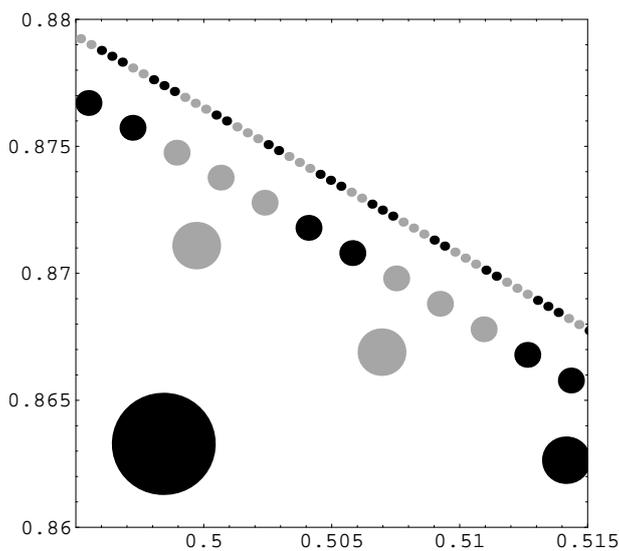


図 40: その拡大図

全ての近似系列 $\phi_k = P_k/Q_k$ について真の根、補助根ともに単位円上にあるが、わかりやすくするため、図では、近似の粗いものほど半径を小さくしてある。この図より見て取れるように、真

の根を A 、補助根を B として、近似をあげるごとに、次のような分岐則があることがわかる。

$$\begin{aligned} A^3 &\rightarrow A^3 B^2 A^3 B^2 A^3 \\ A^2 &\rightarrow A^3 B^2 A^3 \\ B^3 &\rightarrow B^3 A^2 B^3 A^2 B^3 \\ B^2 &\rightarrow B^3 A^2 B^3. \end{aligned} \tag{49}$$

なお、初期条件としては $B^3 A^2 B^3 A^2$ (単位円上で周期的) をとる。この分岐則から Incommensurate 極限の場合の分布関数は至る所、微分不可能な特異的な関数であることがわかる。この性質は、他の Incommensurate 極限の場合も同様であり、Incommensurate 極限に特有であると考えられる。

一方準古典極限 $\phi = 1/\text{整数}$ の系列では根の分布も図の様にきわめて単純であることがわかる。

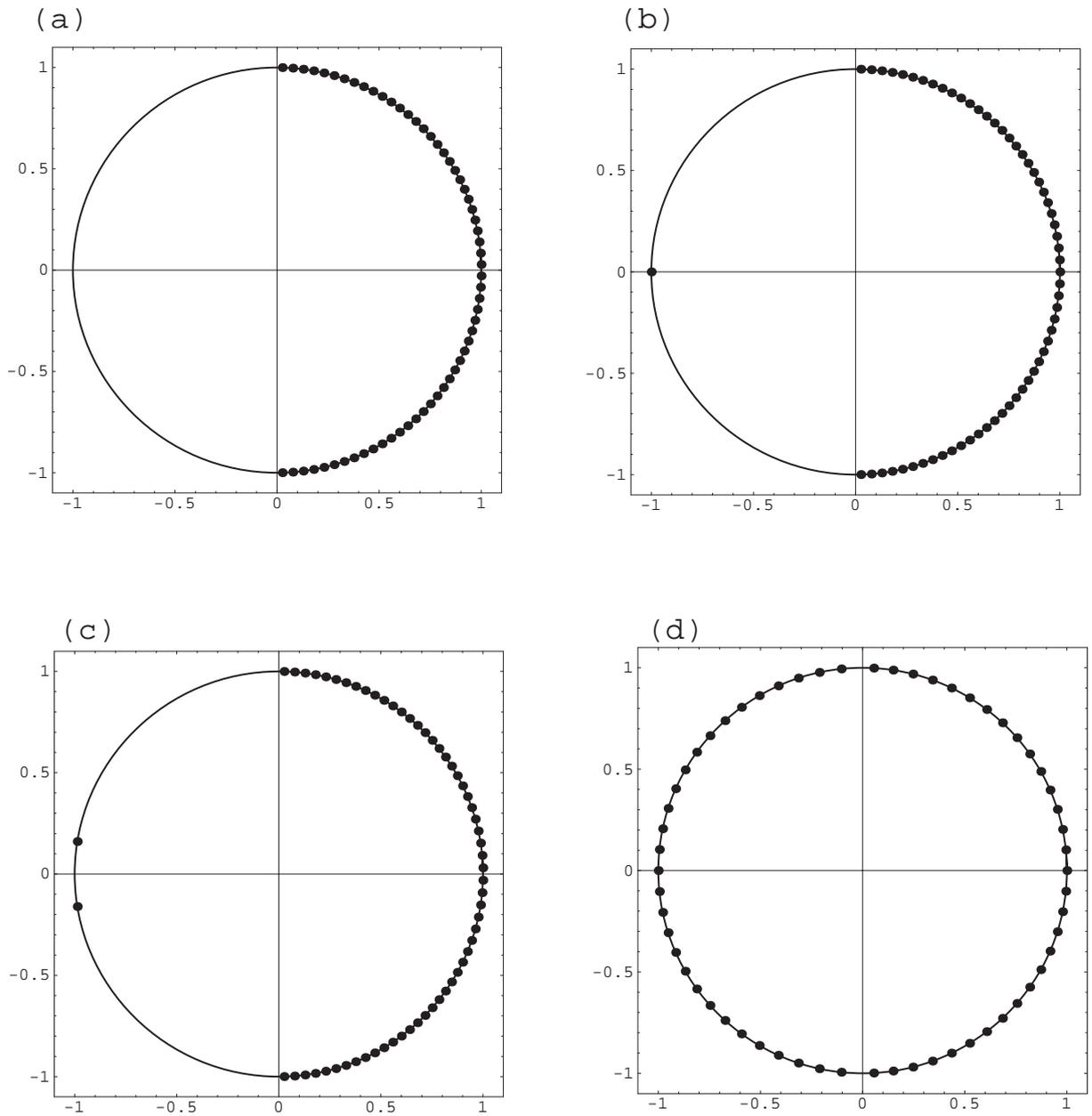


図 41: 古典極限 $\phi = 1/\text{整数}$ におけるベーテ仮説方程式の根の分布。ゼロモード以外の根の分布も示す。

このように準古典極限における根は常に単位円上にあるがそれ以外の系列たとえばフィボナッチ数から作る系列では下図の様に分布が必ずしも単位円上に限られない。(ストリング型)

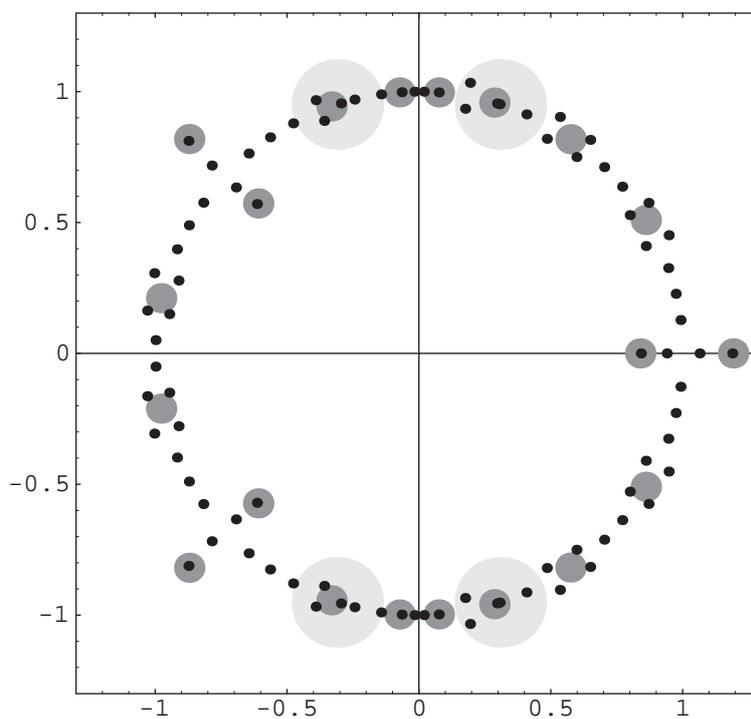
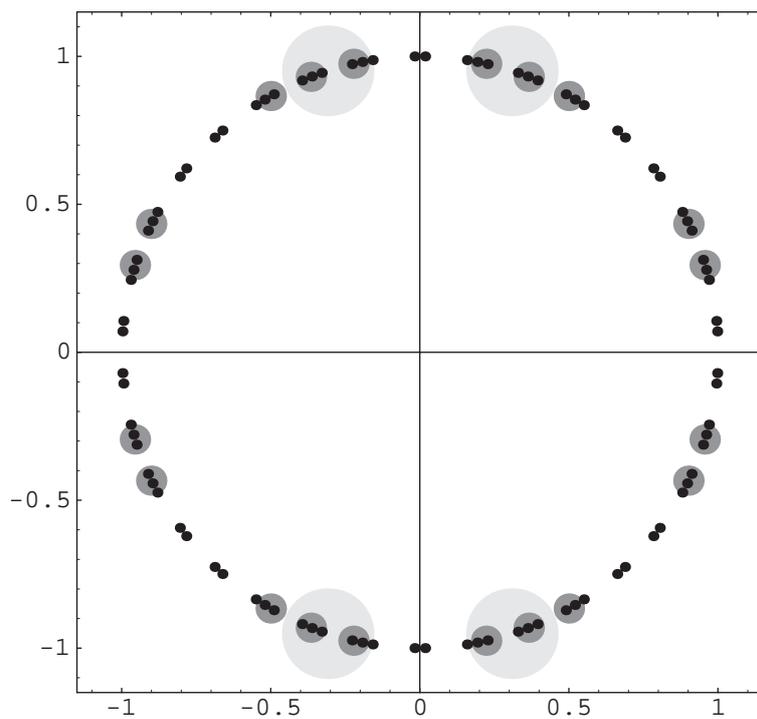


図 42: Incommensurate 極限へ近づく系列でのベテ方程式の根の分布、上: ゼロモード、下: 一般のエネルギー [76]

次に、物理量である、波動関数の振幅を考えてみよう。ここで、結果を見やすくするのに、離散点 j の名前づけを $j = \bar{j} + J_1$ と J_1 だけずらす。ここで J_1 は、 $PJ_1 = (Q - P)/2 \pmod{2Q}$ により定まる整数である。このとき $\bar{j} = 1, 3, \dots, Q$ に対して、

$$|\Psi_{\bar{1}}|^2 = Q, \tag{50}$$

$$|\Psi_{\bar{j}}|^2 = Q \frac{[\bar{j} - 2]_q!!}{[\bar{j} - 1]_q!!}, \quad \bar{j} = 3, 5, \dots, Q \tag{51}$$

と具体的に、波動関数の振幅が書き下せる。なおここで $[j]_q!! = [j]_q[j - 2]_q \cdots [2]_q, \text{or}[1]_q$ の記号を用いている。更に面白いことに、古典極限 $P = 1, Q \rightarrow \infty$ の場合、 $\psi(x) = \Psi_{\bar{j}}, x = (2\bar{j} - 1)/2Q$ とスケールされた連続変数 $x, (0 < x < 1)$ により

$$|\psi(x)|^2 = \frac{2}{\sin(\pi x)}, \quad (0 < x < 1), \tag{52}$$

のようにコンパクトな形にまとめることもできる。

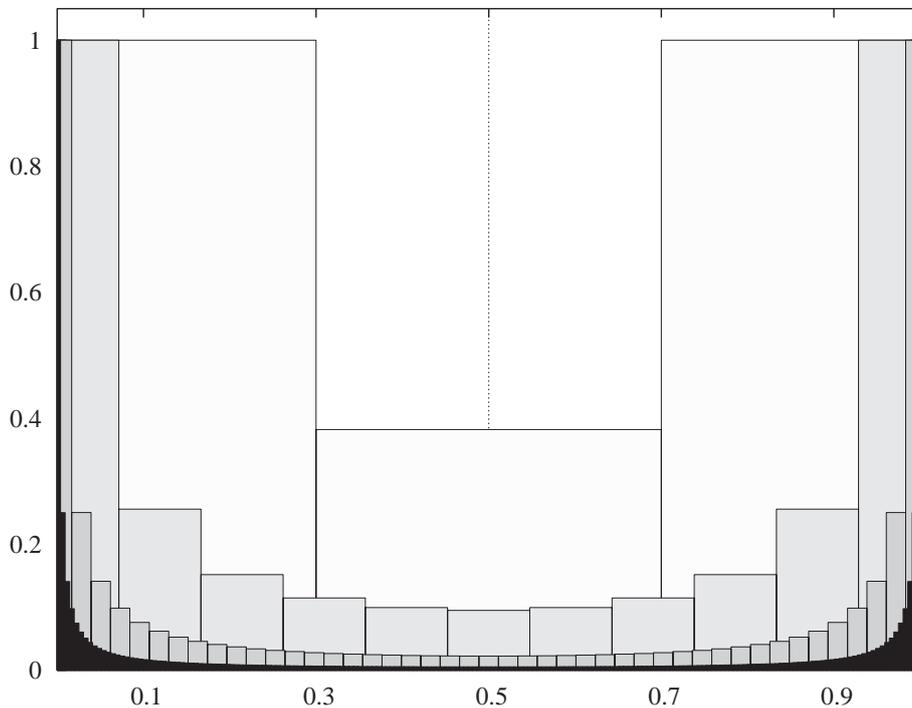


図 43: 準古典極限 $\phi = 1/\text{整数}$ の系列での波動関数

一方 Incommensurate 極限に近づく系列においては波動関数に関してもきれいな分岐則が見て取れる。

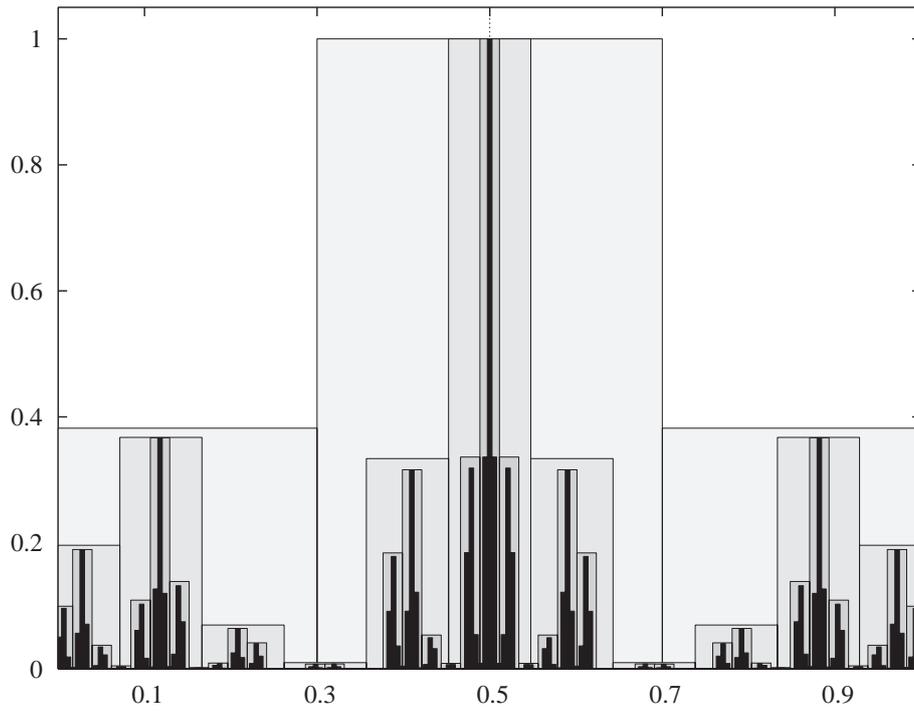


図 44: フィボナッチ数から作った Incommensurate 極限に収束する系列での波動関数の振幅

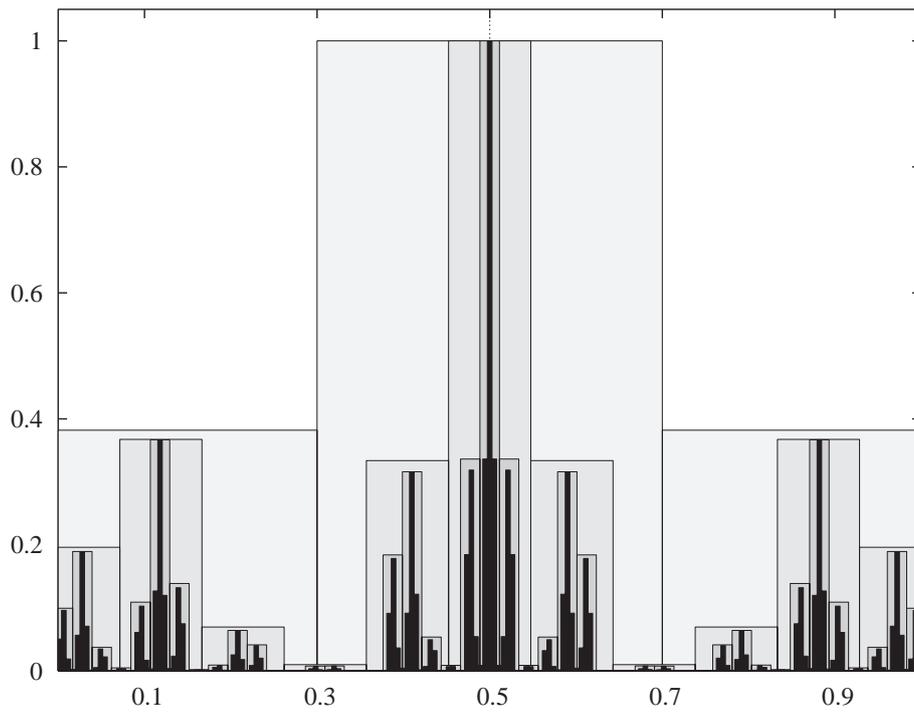


図 45: 図 44 の拡大図

なおこの波動関数に対応して関数方程式型のシュレディンガー方程式の解を作る多項式はその係数がマルチフラクタルとなるものが現れることを最後に注意しておく。

このあといくつかの重要な進展があるがそれについては講義でふれたい。

7 終わりに

以上時間の関係上省略した話題も多いが、磁場中の電子系の問題は、物性物理と数理的構造とのいくつかの意外な関係を見せてくれたことは伝えられたものと期待したい。歴史的にはこの問題に関して、もう調べ尽くされたと思えた時期も何度かあったがそのたびに新しい発見があり、驚きをとまなう興味深いブレークスルーが何度もくりかえされてきたのである。私には、未だ明らかになっていない興味深い構造がまだそこにあるかのように思えるが、みなさんにとっては如何であろうか。

cord

参考文献

- [1] K. V. Klitzing, G. Dorda, and M. Pepper, *Phys. Rev. Lett.* **45**, 494 (1980).
- [2] *The Quantum Hall Effect*, ed. R. E. Prange and S. M. Girvin, Springer-Verlag (1987).
- [3] *Quantum Hall Effect*, ed. M. Stone, World Scientific, (1992).
- [4] 初貝安弘、*固体物理* **29**, 550-556 (1994).
- [5] Y. Hatsugai, *J. Phys. C, Condens. Matter* **9**, 2507-2549 (1997) (Review Article).
- [6] H. Aoki and T. Ando, *Solid State Commun.* **38**, 1079 (1981).
- [7] R. B. Laughlin, *Phys. Rev. B* **23**, 5632 (1981).
- [8] B. I. Halperin, *Phys. Rev. B* **25**, 2185 (1982).
- [9] See F. D. M. Haldane, in *The Quantum Hall Effect*, ed. R. E. Prange and S. M. Girvin, Springer-Verlag (1987).
- [10] J. Zak, *Phys. Rev.* **134**, A1602, 1607 (1964).
- [11] M. Ya. Azbel, *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **46**, 929 (1964) [*Sov. Phys. – JETP* **19**, 634, (1964)].
- [12] D. R. Hofstadter, *Phys. Rev. B* **14**, 2239 (1976).
- [13] G. H. Wannier, *Phys. Status Solidi B* **88**, 757 (1978); G. H. Wannier, G. M. Obemaier, and R. Ray, *ibid.* **B 93**, 337 (1979).
- [14] P.G. Harper, *Proc. Phys. Soc., London, Sect. A* **68**, 874 (1955).
- [15] L. Schweizer, B. Kramer, and A. MacKinnon, *J. Phys. C* **17**, 4111 (1984); R. Johnstn, B. Kramer, and A. MacKinnon, *Surf. Sci.* **170**, 256 (1986).
- [16] D. J. Thouless, M. Kohmoto, P. Nightingale, and M. den Nijs, *Phys. Rev. Lett.* **49**, 405 (1982).
- [17] M. Kohmoto, *Ann. Phys. (N. Y.)* **160**, 355 (1985).
- [18] Y. Hatsugai, *Phys. Rev. B* **48**, 11851 (1993).
- [19] Y. Hatsugai, *Phys. Rev. Lett.* **71**, 3697 (1993).
- [20] Y. Hatsugai, in *Quantum Coherence and Decoherence* ed. K. Fujikawa and, Y.A. Ono, 167 North-Holland (1996).
- [21] K. Hoshi and Y. Hatsugai, *cond-mat/9908254*, *Phys. Rev.* **B61**, 4409-4412 (2000).
- [22] M. Kohmoto, *Phys. Rev. B* **39**, 11943 (1989).

- [23] J. Avron, R. Seiler, and B. Simon, *Phys. Rev. Lett.* **51**, 51 (1983).
- [24] J. K. Jain, *Phys. Rev. Lett.* **63**, 199 (1989).
- [25] N. Byers and C. N. Yang, *Phys. Rev. Lett.* **7**, 46 (1961).
- [26] M. Toda, *Theory of Nonlinear Lattices*, Springer-Verlag (1981) and references therein.
- [27] D. Mumford, *Tata Lectures on Theta I, II*, Birkhäuser, Boston (1983).
- [28] E. Date and S. Tanaka, *Prog. Theor. Phys.* **55**, 457 (1976); *Prog. Theor. Phys. Suppl.* **59**, 107 (1976).
- [29] P. A. M. Dirac, *Proc. R. Soc. A* **133**, 60 (1931).
- [30] T. T. Wu and C. N. Yang, *Phys. Rev. D* **12**, 3845 (1975).
- [31] M. V. Berry, *Proc. R. Soc. A* **392**, 45 (1984).
- [32] *Geometric Phases in Physics*, ed. A. Shapere and F. Wilczek World Scientific (1989).
- [33] F. Wilczek, *Phys. Rev. Lett.* **48**, 1144, (1982).
- [34] Y. S. Wu, *Phys. Rev. Lett.* **52**, 2103, (1984).
- [35] *Fractional Statistics and Anyon Superconductivity*, ed. F. Wilczek, World Scientific, (1990).
- [36] Y. Aharonov and D. Bohm, *Phys. Rev.* **115**, 485 (1959).
- [37] B. I. Halperin, P.A. Lee, and N. Read, *Phys. Rev. B* **47**, 7312 (1993).
- [38] R. Laughlin, *Phys. Rev. Lett.* **60**, 2677, (1988).
- [39] Y.-H. Chen, F. Wilczek, E. Witten, B.I. Halperin, *Int. J. Mod Phys. B3* 1001 (1989).
- [40] F. D. M. Haldane, *Phys. Rev. Lett.* **67**, 937, (1991).
- [41] Y. S. Wu, *Phys. Rev. Lett.* **73**, 922, (1994).
- [42] Y.S. Wu, Y. Yu, Y. Hatsugai and M. Kohmoto, *Phys. Rev.* **B57**, 9907-9919 (1998).
- [43] P. B. Wiegmann and A. V. Zabrodin, *Phys. Rev. Lett.* **72** 1890 (1994)
- [44] L. D. Fadeev and R. M. Kashaev, University of Helsinki Report No. HU-TFT-93-63.
- [45] Y. Hatsugai, M. Kohmoto, and Y. S. Wu, *Phys. Rev. Lett.* **73** 1134 (1994)
- [46] H. Hiramoto and M. Kohmoto, *Int. Jour. Mod. Phys. B* **6** 281-320 (1992).
- [47] Y. Hatsugai, M. Kohmoto, and Y.-S. Wu *Phys. Rev. B* **53**, 9697 (1996).
- [48] Q. Niu, D. J. Thouless, and Y. S. Wu, *Phys. Rev. B* **31**,3372 (1985).
- [49] M-. Chang and Q. Niu, *Phys. Rev. B* **53**, 7010 (1996).
- [50] B. Douçot and P. C. E. Stamp, *Phys. Rev. Lett.* **66**, 2503 (1991).

- [51] M. Takahashi, Y. Hatsugai, and M. Kohmoto J. Phys. Soc. Jpn. **65**, 529 (1996).
- [52] R. Rammal, G. Thoulouse, M. T. Jaekel and B. I. Halperin, Phys. Rev. **B27**, 5142 (1983).
- [53] A. H. MacDonald, Phys. Rev. B **29**, 6563 (1984).
- [54] A. H. MacDonald and P. Streda Phys. Rev. B **29**, 1616 (1984).
- [55] S. N. Sun and J. P. Ralston, Phys. Rev. B **44**, 13603 (1991).
- [56] X. G. Wen and A. Zee, Nucl. Phys. **B 316**, 641 (1989).
- [57] Y. Hatsugai and M. Kohmoto Phys. Rev. B **42**, 8282 (1990).
- [58] Z. Tešanović, F. Axel, B. I. Halperin, Phys. Rev. B **39**, 8525 (1989)
- [59] H. Kunz, Phys. Rev. Lett. **57**, 1095 (1986);
- [60] D. J. Thouless, Phys. Rev. B **27**, 6083 (1983);
- [61] A. H. MacDonald, Phys. Rev. B **28**, 6713 (1983).
- [62] A. Widom, Phys. Lett. **90A**, 474 (1982)
- [63] P. Strěda, J. Phys. C **15**, L717 (1982).
- [64] X. G. Wen, F. Wilczek, and A. Zee, Phys. Rev. B **39**, 11413 (1989).
- [65] Y. Hatsugai, M. Kohmoto, and Y.-S. Wu Phys. Rev. B **54**, 4896 (1996).
- [66] G. S. Canright, S. M. Girvin, and A. Brass, Phys. Rev. Lett. **63**, 2291 (1989).
- [67] X. G. Wen, E. Dagotto, and E. Fradkin, Phys. Rev. B **42**, 6110 (1989).
- [68] Y. Hatsugai, M. Kohmoto, and Y.-S. Wu Phys. Rev. B **43**, 2661 (1991).
- [69] S. Girvin and A. H. MacDonald Phys. Rev. Lett. **58**, 1252 (1987).
- [70] D. Thouless, Phys. Rev. B **28**, 4272 (1983).
- [71] Masahito Takahashi, Yasuhiro Hatsugai, and Mahito Kohmoto, J. Phys. Soc. Jpn., 65 529-537, (1996).
- [72] Y. Hatsugai, M. Kohmoto, and Y. S. Wu, Phys. Rev. **B53**, 9697-9712 (1996).
- [73] Y. Hatsugai and M. Kohmoto, Phys. Rev. **B42**, 8282 (1990).
- [74] Y. Hatsugai, M. Kohmoto, and Y. S. Wu, Phys. Rev. **B54**, 4898-4906 (1996).
- [75] 初貝安弘、物性理論とその数理、数理科学 1 月号 32-38 (1996).
- [76] 180-183, in " *Quasicrystal* ", ed. S. Takeuchi and T. Fujiwara, World Scientific, (1998).
- [77] Y. Hatsugai K. Ishibashi, and Y. Morita, cond-mat/9903223, Phys. Rev. Lett. 83,2246-2249(1999).

- [78] Y. Morita, K. Ishibashi and Y. Hatsugai, cond-mat/9908002, Phys. Rev. **B1**,5952 (2000).
- [79] Y. Hatsugai and Y. Morita, Physica B: Condensed Matter, Vol. 284, Part 2, July 2000, Pages 1724-1725 (2000)
- [80] Y. Morita and Y. Hatsugai, cond-mat/9907001, Phys. Rev. **B2**,9 (2000)
- [81] Y. Morita and Y. Hatsugai, Phys. Rev. Lett 86,51-1542001).