

## 6 磁場中の電子系における幾何学的位相と量子群

### 6.1 イントロダクション

最初に触れたように磁場があると電子が運動する際に受ける位相変化がその履歴に依存する。例えば  $A$  によってから  $B$  に行くのと  $B$  によってから  $A$  に行くのとで位相が異なることとなる。一方量子群という新しい代数構造が数学、物理で最近話題となっているがそこでの一つの関係式は例えば

$$AB = qBA$$

等とかかれるがこの非可換性は  $q = e^{i\phi}$  とすれば今議論してきた磁場中の電子系のものにいてる (と思いませんか)。この議論はただ似ているというだけでなく、実際使える段階まで現実的なものとしていろいろな研究があるわけです。

以下、時間の関係で以前数理科学に書いたものをかなりの部分再録しています [75]。

アハロノフ-ボーム効果やモノポールの量子化の議論等でわかるように、磁場の効果を量子力学に基づいて考える際、本質的なものは観測量 (オブザーバブル) である磁場  $B$  ではなく、ベクトルポテンシャル  $A$ ,  $B = \text{rot}A$  である。たとえ磁場が局所的であってもベクトルポテンシャル  $A$  は、非局所的であり磁場中を電子が運動するとき、電子の波動関数は、その移動経路に依存する位相を受けることとなる。波動関数の位相は、 $A$  自身は観測量でないことに起因するゲージ変換による不定性を持つ。この位相により、アハロノフ-ボーム効果に代表されるようなゲージ変換によっても消去できない物理的効果をもたらされることがある。これが、いわゆる幾何学的位相の典型的な例である。また、より基本的には、二次元電子は一樣磁場中においては自由電子の分散関係とは全く異なる、ランダウレベルと言われる特異的な分散関係を形成することはよく知られているが、振り返って考えてみるとこれ自身大変不思議な事実である。さらに、固体中の電子系を考えると、固体中では、結晶からの周期的ポテンシャルの効果もあいまってよりいっそう多様な興味深い現象が生ずる。このような周期的ポテンシャル中にある二次元磁場中の電子系をモデル化して格子上の以下のような、タイトバインディングハミルトニアンを考えよう。

$$H = T_x + T_y + T_x^\dagger + T_y^\dagger \quad (1)$$

ここで、 $x, y$  方向への格子間隔あたりの並進演算子  $T_x, T_y$  は、 $c_{m,n}$  を  $(m, n)$  サイトの電子の消滅演算子として

$$T_x = \sum_{m,n} c_{m+1,n}^\dagger c_{m,n} e^{i\theta_{m,n}^x}, \quad (2)$$

$$T_y = \sum_{m,n} c_{m,n+1}^\dagger c_{m,n} e^{i\theta_{m,n}^y}, \quad (3)$$

のように定義される。ここで位相因子  $e^{i\theta_{m,n}^{x,y}}$  は、ベクトルポテンシャル  $A$  に起因し、格子あたりの磁束  $\phi$  と

$$\begin{aligned} \text{rot}_{(m,n)}\theta &= \Delta_x \theta_{m,n}^y - \Delta_y \theta_{m,n}^x, \\ &= (\theta_{m+1,n}^y - \theta_{m,n}^y) - (\theta_{m,n+1}^x - \theta_{m,n}^x) = 2\pi\phi \end{aligned} \quad (4)$$

のように結びついている。ここで上述の経路に依存する位相因子に関する議論は、

$$T_y^\dagger T_x^\dagger T_y T_x |\Psi_{m,n}\rangle = e^{i2\pi\phi} |\Psi_{m,n}\rangle, \quad (5)$$

( $|\Psi_{m,n}\rangle = c_{m,n}^\dagger |0\rangle$ ) と表現できる。ここで  $T_y^\dagger T_x^\dagger T_y T_x$  の演算は、最小の格子のリンクをひとまわりすることに対応する。

この格子上の 2次元電子系のエネルギースペクトルは、格子あたりの磁束が  $\phi = P/Q$  と有理数の時、 $Q$  個のエネルギーバンドからなることが知られている。すなわち、 $\phi$  を連続的に変化させたとき、エネルギースペクトルは、複雑な構造を示すことが期待される。これが、図 1 に示すような、Hofstadter のバタフライと呼ばれるものである。このスペクトルは図から予想されるように、フラクタル構造を持つことが知られている。更に、この系の電気伝導を考えたとき系のホール伝導度について、(1) ホール伝導度がある種の位相不変量でかけること、(2) 系の複素エネルギー面を考えると、それは  $Q$  個のエネルギーバンドをブランチカットとする種数  $g = Q - 1$  のリーマン面であり、その上でのある種の回転数という位相幾何学的量が、ホール伝導度という具体的な、物理量をあたえていること、を指摘しておきたい。このように、上述の系は、フラクタル、位相幾何学といった数理と関連していることが知られていたが、更に量子群という代数的構造とも非常に強い関連があることが、近年の研究で明らかとなった。[43, 44, 45]

まず、磁束を表す  $\theta_{m,n}^{x,y}$  を  $\theta_{mn,n}^x = \pi\phi \cdot (m+n)$ ,  $\theta_{mn,n}^y = -\pi\phi \cdot (m+n+1)$  とする。(これらは、関係式 (4) を満たす限り自由に選ぶ自由度があるが、これがゲージ対称性に対応する。) そこで、一粒子シュレディンガー方程式 (15 ページ参照)  $H|\bar{\psi}\rangle = E|\bar{\psi}\rangle$ ,  $|\bar{\psi}\rangle = \sum_{mn,n} \bar{\psi}_{m,n} c_{m,n}^\dagger |0\rangle$  を考えると、これは、以下のように書ける。

$$\begin{aligned} e^{i\pi\phi(m+n-1)} \bar{\psi}_{m-1,n} + e^{-i\pi\phi(m+n)} \bar{\psi}_{m+1,n} \\ + e^{-i\pi\phi(m+n)} \bar{\psi}_{m,n-1} + e^{i\pi\phi(m+n+1)} \bar{\psi}_{m,n+1} = E \bar{\psi}_{m,n} \end{aligned} \quad (6)$$

ここで、この方程式が、(1)  $(m,n) \rightarrow (m+Q, n+Q)$ , (2)  $(m,n) \rightarrow (m+1, n-1)$  の変換 (並進) について不変であることからいわゆるブロッホの定理によって  $\bar{\psi}_{m,n} = e^{ip_-(m-n)} e^{ip_+(m+n)} \psi_{m+n}(p_+, p_-)$ ,  $\psi_{m+n}(p_+, p_-) = \psi_{m+n+2Q}(p_+, p_-)$  と書けることがわかる。ここで  $p_+$ ,  $p_-$  は、磁気運動量と呼ばれる。以下、考察を mid band 条件と呼ばれる特殊な運動量  $(p_+, p_-) = (\frac{\pi}{2}, 0)$  に限ろう。このとき、一粒子シュレディンガー方程式は、 $q$ -パラメータを  $q = e^{i\pi\phi} = e^{i\pi\frac{P}{Q}}$  として、

$$i(q^{-j} + q^{j+1})\psi_{j+1} - i(q^{j-1} + q^{-j})\psi_{j-1} = E\psi_j, \quad (7)$$

( $\psi_{j+2Q} = \psi_j$ ) となる。なおここでいわゆる  $q$ -パラメータが導入され、これを通じて我々の問題と、量子群 (quantum group) が関連することになる。なお、我々は技術的理由で  $P$  と  $Q$  とは、互いに素な奇数であると仮定するので  $q^Q = e^{i\pi P} = -1$ ,  $q^{2Q} = 1$  なる関係があることを注意しておく。前述の Hofstadter のバタフライは、固有値方程式 (7) の固有値を  $Q = 401$ ,  $P = 1, 3, \dots, Q-2$  に対してプロットしたものである。ここで、基底の周期性に注意するとこの固有値方程式は、次の  $2Q$  次元の行列  $H_{mid\ band}$  の固有値問題と読み直せる。

$$H_{mid\ band} = i(q - q^{-1})^{-1}(B_C + C_C) \quad (8)$$

$$B_C = -(q - q^{-1})^{-1}(X - X^{-1})Y, \quad (9)$$

$$C_C = -(q - q^{-1})^{-1}Y^{-1}(X - X^{-1}) \quad (10)$$

ここで  $X, Y$  は、

$$X = \begin{bmatrix} 0 & & & & 1 \\ 1 & 0 & & & \\ 0 & 1 & 0 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (11)$$

$$Y = \text{diag}(q^1, q^2, \dots, q^{2Q}) \quad (12)$$

であり、以下の関係式を満たす。

$$X^{2Q} = Y^{2Q} = I_{2Q}, \quad (13)$$

$$qXY = YX, \quad X^T = X^{-1}, Y^T = Y \quad (14)$$

Wiegmann 等の重要な発見は、 $B_C, C_C$  の他に次の 2 つの行列

$$A_C = q^{-(Q-1)/2} X^{-1}, \quad (15)$$

$$D_C = q^{(Q-1)/2} X, \quad (16)$$

を補うことにより構成される、 $\{A_C, B_C, C_C, D_C\}$  が量子群  $U_q(sl_2)$  の  $2Q$  次元のサイクリック表現となっており、それを用いて物理的なハミルトニアン  $H_{mid\ band}$  が書き下し得ることに気がついた点にある。この意外な関連により以下述べるような物性物理の系と数理的構造との興味深い関連が認識されるに至ったのである。次の節では、我々に関連する範囲で、量子群  $U_q(sl_2)$  とそのいくつかの表現について具体的にまとめてみる。

## 6.2 量子群といくつかの表現

量子群は歴史的には可解模型、Yang-Baxter 方程式等との関連でその代数構造の研究により発見されてきたのであるが、ここでは古典的かつ最も基本的なリー環  $sl_2$  の  $q$ -変形として量子群  $U_q(sl_2)$  を考える。(予備知識はここでの議論に関する限り全くありません。書いてあることは直接の計算ですぐ確認できます。) まずリー環  $sl_2$  はよく知られているように、 $\{S^z, S^+, S^-\}$  の 3 つの生成子で生成され、これらは、

$$[S^+, S^-] = 2S^z, \quad [S^z, S^\pm] = \pm S^\pm \quad (17)$$

の関係式を満たす。対応して、その  $q$ -変形  $U_q(sl_2)$  は、 $\{A, B, C, D\}$  と 4 つの生成子で生成され、それらは、

$$AD = DA = 1, \quad (18)$$

$$AB = qBA, \quad BD = qDB, \quad (19)$$

$$DC = qCD, \quad CA = qAC, \quad (20)$$

$$[B, C] = \frac{A^2 - D^2}{q - q^{-1}}, \quad (21)$$

の関係式を満たす。(我々の問題は 2 次元磁場中の電子系の問題であり前節で述べたように、経路に依存する位相が重要であり、それは、 $q = e^{i\pi\phi}$  として  $T_y T_x |\Psi_{m,n}\rangle = q^2 T_x T_y |\Psi_{m,n}\rangle$  と磁気並進操

作が非可換であることに典型的に現れている。この非可換性と上記の量子群の定義とのある種の類似を感じとれると思うが、実際その具体的な関連が以下に示すように明らかになったことになる。) )

いわゆる古典極限  $q \rightarrow 1$  で、 $U_q(sl_2)$  は  $sl_2$  へ退化するが、(この古典極限は、我々の問題では  $\phi \rightarrow 0$ 、すなわち弱磁場の極限に対応する。) その対応は、

$$A, D \iff 1, \quad (22)$$

$$\frac{A-D}{q-q^{-1}} \iff S^z, \quad (23)$$

$$B \iff S^+, \quad (24)$$

$$C \iff S^-, \quad (25)$$

となる。例えば、 $[B, C] = (A+D) \cdot (A-D)/(q-q^{-1}) \rightarrow 2S^z$  である。このように、古典極限をとることは、簡単だが、逆に、意味のある  $q$ -変形を見つけるのには、長い歴史が必要であった訳である。(量子群としての数学的構造としては、ホップ代数としての構造が重要な訳だが、我々の議論には、今のところその有用性が使われていないのでその点は、ここでは議論しない。)

次にこれらのある表現について議論しよう。まずリー環  $sl_2$  については、 $j$  を半奇整数 ( $j = 0, 1/2, 1, 3/2, 2, \dots$ ) として、 $2j+1$  次元の表現  $S_h^z|m\rangle = m|m\rangle$ ,  $S_h^\pm|m\rangle = (j \mp m)|m \pm 1\rangle \propto |m \pm 1\rangle$  がある。ここで  $m$  は  $S_h^+|j\rangle = S_h^-|-j\rangle = 0$  より、 $m = -j, -j+1, \dots, j-1, j$  となり、この性質により highest weight 表現といわれる。またこの表現は次のような、微分演算子によりあらわに実現されることが容易に確認できる。

$$S_h^z = z\partial_z - j, \quad S_h^+ = z(2j - z\partial_z), \quad S_h^- = \partial_z, \quad (26)$$

$$|m\rangle = z^{m+j} \quad (27)$$

さらに表現が highest weight 表現であることより有限の基底がとれて、これらの微分演算子は、 $\Psi(z) = z^{2j} + a_{2j-1}z^{2j-1} + \dots + a_1z + a_0$  という  $2j$  次の多項式に作用するとみなせることに注目しておこう。

さて、対応する  $q$ -変形した量子群の方にも対応する表現が知られている。それは、いわゆる  $q$ -差分演算子により関数  $\Psi(z)$  に作用する演算子として、次のように与えられる。

$$A_h \Psi(z) = q^{-j} \Psi(qz), \quad (28)$$

$$B_h \Psi(z) = (q - q^{-1})^{-1} z [q^{2j} \Psi(q^{-1}z) - q^{-2j} \Psi(qz)], \quad (29)$$

$$C_h \Psi(z) = -(q - q^{-1})^{-1} z^{-1} [\Psi(q^{-1}z) - \Psi(qz)], \quad (30)$$

$$D_h \Psi(z) = q^j \Psi(q^{-1}z). \quad (31)$$

これらの  $q$ -差分演算子はまた  $\rho_h(B)z^{2j} = \rho_h(C)z^0 = 0$  を満たしこの表現はまた highest weight 表現といわれる。つまり、 $\Psi(z)$  としては  $2j$  次の多項式を考えればよいことになる。ちなみに

$z^k$ ,  $k = 0, 1, \dots, 2j$  を基底とすると表現行列は次のようにあらわせる。

$$A_h : \text{diag}(q^{-j}, q^{1-j}, \dots, q^{j-1}, q^j) \quad (32)$$

$$D_h : \text{diag}(q^j, q^{-1+j}, \dots, q^{-j+1}, q^{-j}) \quad (33)$$

$$B_h : \begin{bmatrix} 0 & & & & 0 \\ [2j]_q & 0 & & & \\ 0 & [2j-1]_q & 0 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ 0 & & & [1]_q & 0 \end{bmatrix} \quad (34)$$

$$C_h : \begin{bmatrix} 0 & [1]_q & & & 0 \\ & 0 & [2]_q & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & [2j]_q \\ 0 & & & & 0 \end{bmatrix} \quad (35)$$

ここで、 $[n]_q$  は、いわゆる  $q$ -整数で次のように定義される。

$$[n]_q = \frac{q^n - q^{-n}}{q - q^{-1}}, \quad (36)$$

なお、これら  $q$ -整数は、古典極限  $q \rightarrow 1$  で通常の整数  $[n]_q \rightarrow n$  となる。

ここまでは、 $sl_2$  と  $U_q(sl_2)$  とは、きわめてパラレルに議論でき、表現のレベルでも、 $q$ -変形、古典極限により両者は対応がついていた。ここまでは、一般の  $q$  について議論できたわけであるが、 $q$  が 1 のべき根の時には、対応する古典極限での対応物のない全く新しい状況が生じることが知られている。我々の 2 次元磁場中の電子系の場合は、 $q^{2Q} = 1$  であり、まさに、この 1 のべき根の場合に対応する。

いま  $Q = 2j + 1$  として、 $2j + 1$  次元の highest weight 表現を考える。このとき

$$\psi_k = \Psi(q^k) \quad (37)$$

により、新しい基底  $\{\psi_n | n = 1, 2, \dots, 2Q\}$  を定義する。この基底は、 $q$  が、1 のべき根であることより、周期的 (cyclic)  $\psi_{k+2Q} = \psi_k$  である。この基底に関して、具体的に上記の highest weight 表現の作用から導かれる関係式を書き下してみると、 $q^{2Q} = 1$  を用いて

$$A_C \psi_n = q^{-(Q-1)/2} \psi_{n+1}, \quad (38)$$

$$B_C \psi_n = (q - q^{-1})^{-1} (q^{n+1} \psi_{n+1} - q^{n-1} \psi_{n-1}), \quad (39)$$

$$C_C \psi_n = (q - q^{-1})^{-1} (q^{-n} \psi_{n+1} - q^{-n} \psi_{n-1}), \quad (40)$$

$$D_C \psi_n = q^{(Q-1)/2} \psi_{n-1}. \quad (41)$$

となる。この表現行列が、前節の終わりに示した、 $\{A_C, B_B, C_C, D_C\}$  となるわけである。この表現は、一般のサイクリック表現と呼ばれるもののある特殊な場合に対応する。この表現は、対応する古典極限がないものであり、量子群固有のものである。それが我々の物理系の問題と関連するわけである。このような、数学的な抽象的理論が、我々の物性理論における現実の物理と関連していることは、ある種の驚きである。

### 6.3 ブロツホ電子に対するベータ方程式

前節の議論を振り返ってみると量子群  $U_q(sl_2)$  の highest weight 表現から導かれたサイクリック表現の表現行列を用いて、我々の 2次元ブロツホ電子系の特定の運動量の点でのハミルトニアンが  $H_{mid\ band} = i(q - q^{-1})^{-1}(B_C + C_C)$  と fitting されたとみなすことができる。そこで highest weight 表現は、多項式に作用する演算子であったことを思い出すと、この fitting の対応を逆に使って、我々のシュレディンガー方程式 (7) を関数方程式にまで以下の形に引き戻すことができよう。

$$\begin{aligned} i(q - q^{-1})(B_h + C_h)\Psi(z) &= \\ i(qz + z^{-1})\Psi(qz) - i(q^{-1}z + z^{-1})\Psi(q^{-1}z) &= E\Psi(z) \end{aligned} \quad (42)$$

これは、離散的な点のみで定義されていた、ブロツホ電子のシュレディンガー方程式を一般の複素変数  $z$  に関する関数方程式にまで拡張できたことに対応する。関数方程式の解が求まれば、 $\psi_n = \Psi(q^n)$  として我々の問題の解も求まるわけである。ここで重要なことは、前節の議論から明らかなように  $\Psi(z)$  は表現が highest weight 表現であったことに対応して、次数  $2j = Q - 1$  の多項式に限られることである。よって  $Q - 1$  個のゼロ点を  $z_m$ ,  $m = 1, 2, \dots, Q - 1$  とすれば

$$\Psi(z) = \prod_{m=1}^{Q-1} (z - z_m) \quad (43)$$

と因数分解できる。そこで (42) の両辺を  $\Psi(z)$  で割ると

$$\begin{aligned} i(qz + z^{-1}) \frac{\prod_{m=1}^{Q-1} (qz - z_m)}{\prod_{m=1}^{Q-1} (z - z_m)} \\ - i(q^{-1}z + z^{-1}) \frac{\prod_{m=1}^{Q-1} (q^{-1}z - z_m)}{\prod_{m=1}^{Q-1} (z - z_m)} = E \end{aligned} \quad (44)$$

という式が得られるが、ここで右辺が  $z$  に依存しない定数であることに注意すると、一見左辺にある  $z = z_m$  における  $Q - 1$  個の極の留数は、それぞれゼロでなければならない。この pole free の条件から方程式系

$$\frac{z_n^2 + q}{qz_n^2 + 1} = - \prod_{m=1}^{Q-1} \frac{qz_n - z_m}{z_n - qz_m}, \quad n = 1, \dots, Q - 1 \quad (45)$$

が得られる。この高次連立方程式は、ベータ方程式といわれる。この方程式の根を求めれば、我々の問題も解けることになるわけである。また定数項を比較することによりエネルギー  $E$  がベータ方程式の根  $\{z_m\}$  から

$$E = -i(q - q^{-1}) \sum_{m=1}^{Q-1} z_m. \quad (46)$$

と得られることもわかる。

### 6.4 ベータ方程式のあらわな解

前節で説明したベータ方程式は、高次連立方程式系であり、通常、具体的な解を得ることは、困難である。ところが、エネルギー  $E = 0$  の場合特殊な理由により、そのあらわな解が得られた。この節では、このあらわな解について議論し、その物理的帰結についても考察したい。

まず、関数方程式 (42) から出発する。このとき、 $E = 0$  とすると、( $E = 0$  が解の一つとなっていることは、まったく別の理由から知られている。) 少し書き直して

$$q(z^2 + q^{-1})\Psi(qz) = q^{-1}(z^2 + q)\Psi(q^{-1}z). \quad (47)$$

となる。ここで  $z = iq^{+1/2}$  を代入してみよう。すると  $(z^2 + q) = 0$  となるから、 $q(-q + q^{-1})\Psi(iq^{3/2}) = 0$  つまり  $\Psi(iq^{3/2}) = 0$  となる。すなわち  $iq^{3/2}$  が  $\{z_m\}$  の一つであることがわかった。そこで更に  $z = iq^{+5/2}$  としてみよう。すると  $\Psi(q^{-1}z) = \Psi(iq^{3/2}) = 0$  となるので、 $q(-q^5 + q^{-1})\Psi(iq^{7/2}) = 0$  となり、 $q(-q^5 + q^{-1}) \neq 0$  なら  $\Psi(iq^{7/2}) = 0$ 、すなわち  $iq^{7/2}$  もまた  $\{z_m\}$  の一つであることがわかる。この操作を繰り返すことにより、 $iq^{2m-1/2}$ 、 $m = 1, \dots, (Q-1)/2$  がすべて  $\{z_m\}$  に含まれることがわかる。ここで  $m$  に関する制限は  $\Psi(z)$  の前の数因子が消えないとの条件により生ずる。

同様の過程は、まず最初に  $z = iq^{-1/2}$  として、左辺 = 0 とすることからも初められ、 $iq^{-2m+1/2}$ 、 $m = 1, \dots, (Q-1)/2$  も解の一部であることがわかる。最後に、これら 2 つの系統の解を比べると全て異なり、併せて方程式の次数と同じだけあることもわかるため、これで  $\{z_m\}$  すべてがあらわな形で

$$z_m = \begin{cases} iq^{2m-1/2} = ie^{i2\pi\frac{E}{Q}(m-1/4)} \\ iq^{-2m+1/2} = ie^{i2\pi\frac{E}{Q}(m-1/4)} \end{cases} \quad m = 1, \dots, (Q-1)/2. \quad (48)$$

と得られたことになる。面白いことに、これらは全て複素平面上で単位円上にある。そこで  $z_m = e^{i\theta_m}$  とすれば  $\theta_m$  はある種の運動量に対応し、 $Q$  は、ある種の系の大きさに対応するとみなせる。そこで更に  $\Delta\theta$  を隣接する  $\theta_m$  の差と定義すると、ベーテ方程式の根の分布関数  $\rho(\theta) = \lim_{Q \rightarrow \infty} Q\Delta\theta$  が興味ある物理量となる。

以下次のような  $Q \rightarrow \infty$  の 2 つの場合を考えてみる。(これは、ある種の熱力学極限と考えられるだろう。)(1) 古典極限,  $q \rightarrow 1$ 。ただし、 $P = 1, Q \rightarrow \infty$ 。(2) Incommensurate 極限。単位格子あたりの磁束が無理数の場合。具体的には、 $\phi \rightarrow 1/\tau = (\sqrt{5}-1)/2$  ( $\tau$  は黄金比)。この極限をとるために、フィボナッチ数  $F_k$ , ( $F_{k+1} = F_k + F_{k-1}$ ,  $F_1 = 1, F_0 = 1$ ) からなる次のような磁束の系列を考える。 $\phi_k = P_k/Q_k$ ,  $Q_k = F_{3k+1}$ ,  $P_k = F_{3k}$ 。

まず、(1) の場合、この場合容易にわかるように、ベーテ方程式の解は、単位円の上で  $\pm i$  をのぞいて一様に分布する。よって分布関数  $\rho(\theta) = \text{定数}$ 、となる。一方 (2) の Incommensurate 極限の場合、その分布は単純でないことはすぐわかるが、それ以上の知見を得るには次のように考えるのがよい。ベーテ方程式の根 (48) においては、 $m$  に  $m = 1, \dots, (Q-1)/2$  との制限があった。そこでこの制限を満たさないものを補助根と呼ぶことにし、制限を満たす、真の根とともに、プロットしたものを図に示す。

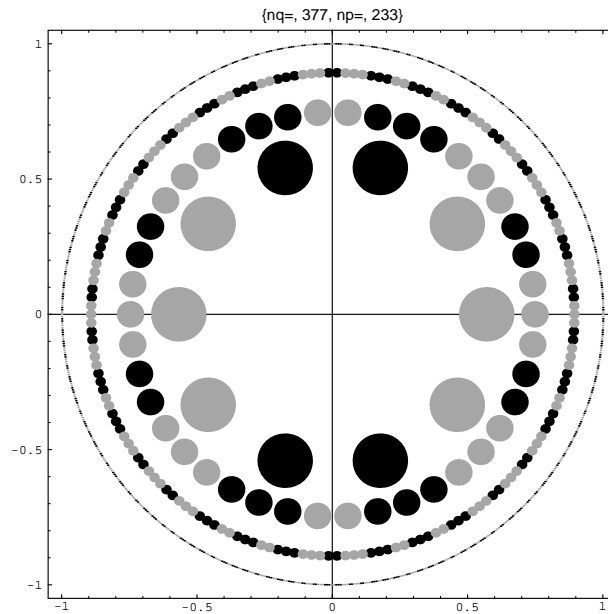


図 39: 解析的に得られたベータ方程式の複素平面上での根。 $\phi = 1/\tau$  の近似有理分数として、 $3/5, 13/21, 55/89, 233/377, \dots$  に対して具体的に示した。(半径は、近似の粗いものほど小さくスケールした。)

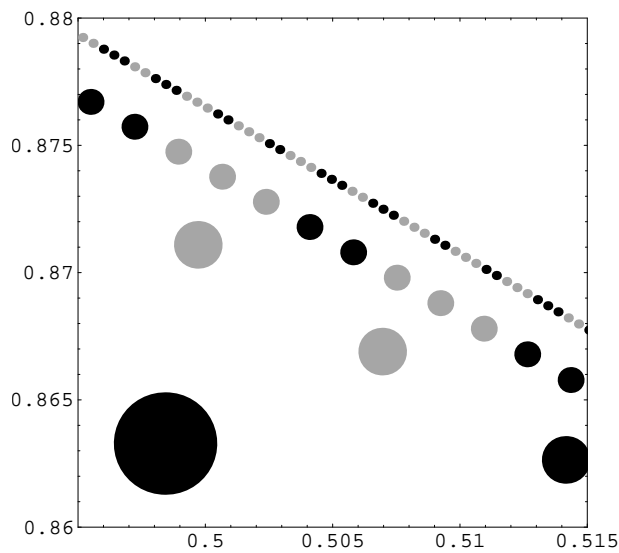


図 40: その拡大図

全ての近似系列  $\phi_k = P_k/Q_k$  について真の根、補助根ともに単位円上にあるが、わかりやすくするため、図では、近似の粗いものほど半径を小さくしてある。この図より見て取れるように、真



の根を  $A$ 、補助根を  $B$  として、近似をあげるごとに、次のような分岐則があることがわかる。

$$\begin{aligned} A^3 &\rightarrow A^3 B^2 A^3 B^2 A^3 \\ A^2 &\rightarrow A^3 B^2 A^3 \\ B^3 &\rightarrow B^3 A^2 B^3 A^2 B^3 \\ B^2 &\rightarrow B^3 A^2 B^3. \end{aligned} \tag{49}$$

なお、初期条件としては  $B^3 A^2 B^3 A^2$  (単位円上で周期的) をとる。この分岐則から Incommensurate 極限の場合の分布関数は至る所、微分不可能な特異的な関数であることがわかる。この性質は、他の Incommensurate 極限の場合も同様であり、Incommensurate 極限に特有であると考えられる。

一方準古典極限  $\phi = 1/\text{整数}$  の系列では根の分布も図の様にきわめて単純であることがわかる。

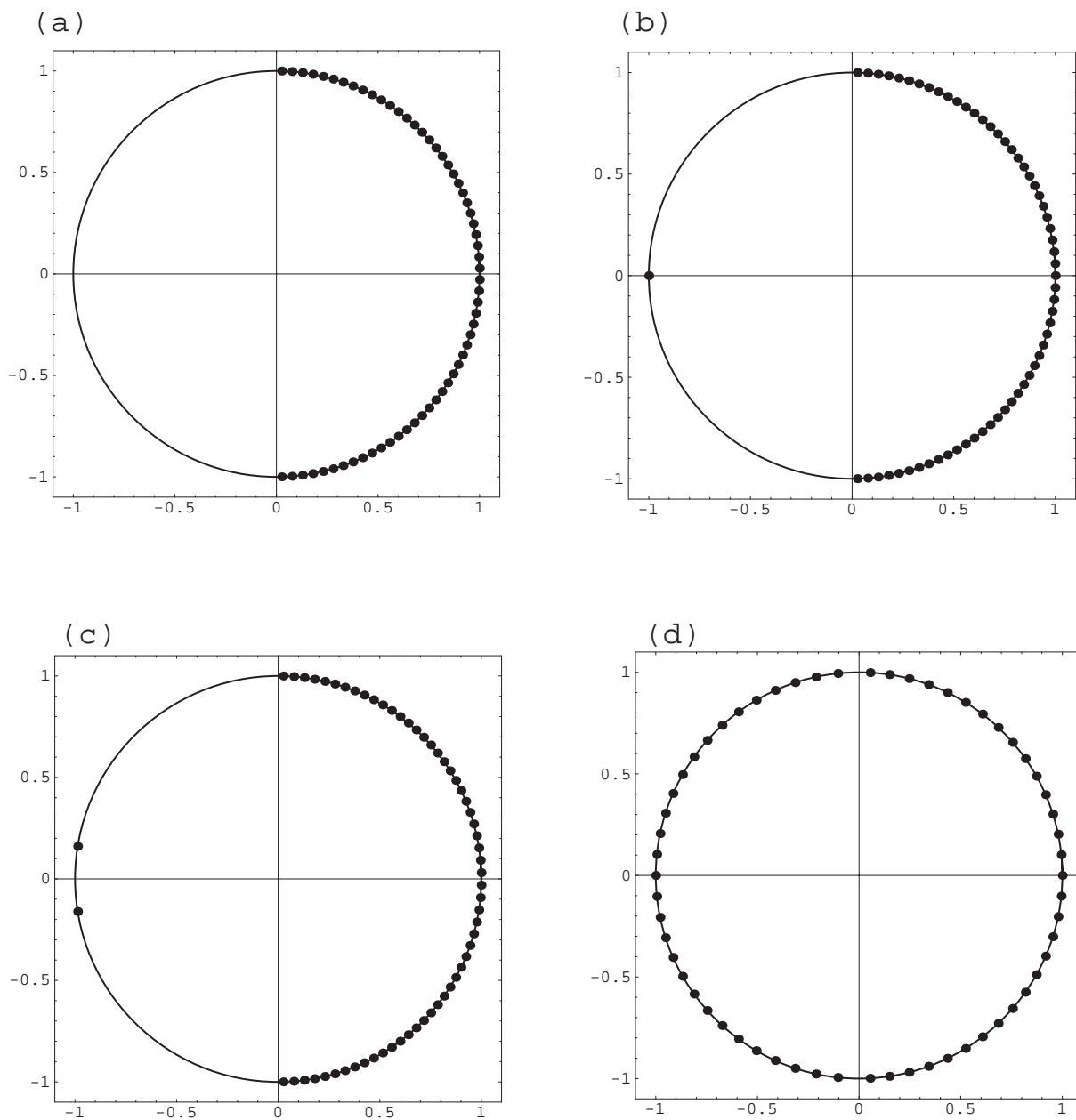


図 41: 古典極限  $\phi = 1/\text{整数}$  におけるベーテ仮説方程式の根の分布。ゼロモード以外の根の分布も示す。

このように準古典極限における根は常に単位円上にあるがそれ以外の系列たとえばフィボナッチ数から作る系列では下図の様に分布が必ずしも単位円上に限られない。(ストリング型)

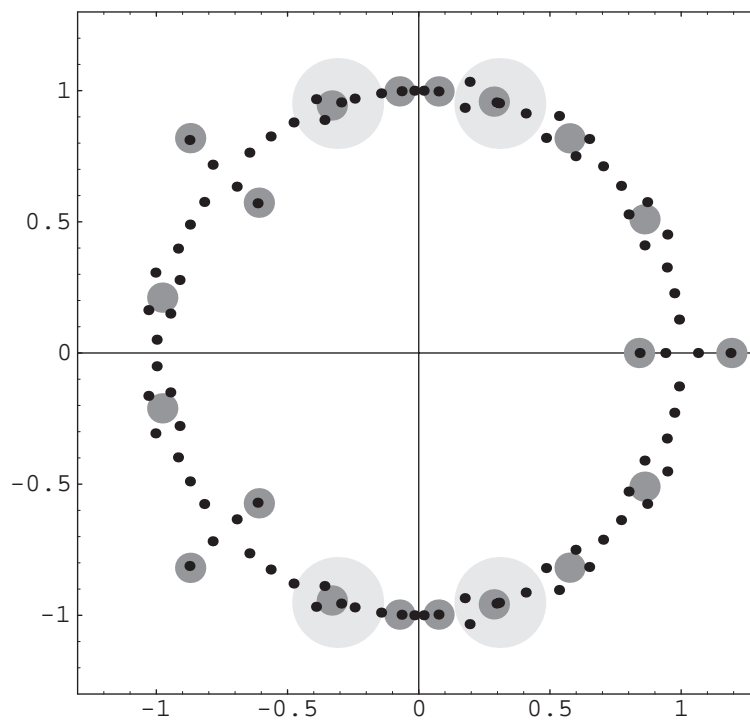
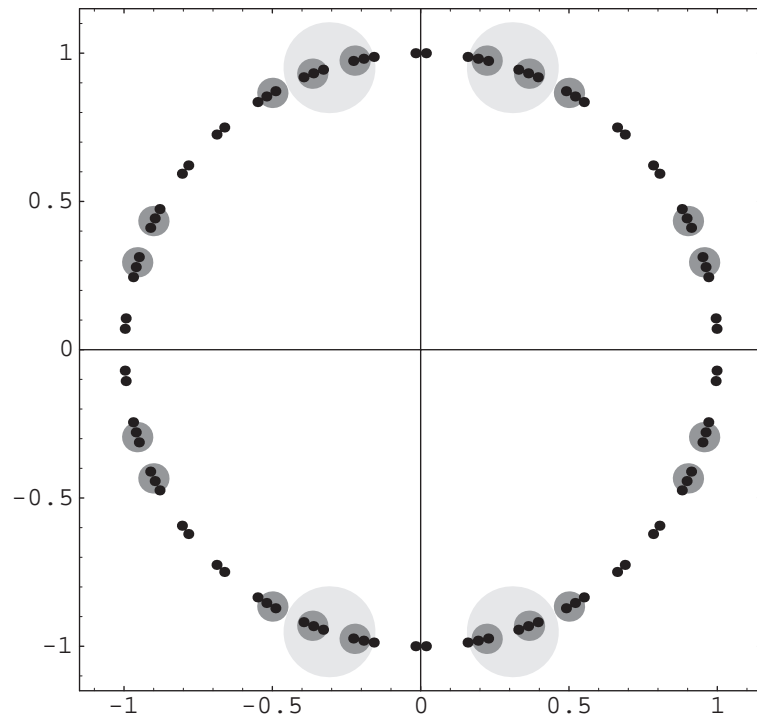


図 42: Incommensurate 極限へ近づく系列でのベテ方程式の根の分布、上：ゼロモード、下：一般のエネルギー [76]

次に、物理量である、波動関数の振幅を考えてみよう。ここで、結果を見やすくするのに、離散点  $j$  の名前づけを  $j = \bar{j} + J_1$  と  $J_1$  だけずらす。ここで  $J_1$  は、 $PJ_1 = (Q - P)/2 \pmod{2Q}$  により定まる整数である。このとき  $\bar{j} = 1, 3, \dots, Q$  に対して、

$$|\Psi_{\bar{1}}|^2 = Q, \tag{50}$$

$$|\Psi_{\bar{j}}|^2 = Q \frac{[\bar{j} - 2]_q!!}{[\bar{j} - 1]_q!!}, \quad \bar{j} = 3, 5, \dots, Q \tag{51}$$

と具体的に、波動関数の振幅が書き下せる。なおここで  $[j]_q!! = [j]_q[j - 2]_q \cdots [2]_q, \text{or}[1]_q$  の記号を用いている。更に面白いことに、古典極限  $P = 1, Q \rightarrow \infty$  の場合、 $\psi(x) = \Psi_{\bar{j}}, x = (2\bar{j} - 1)/2Q$  とスケールされた連続変数  $x, (0 < x < 1)$  により

$$|\psi(x)|^2 = \frac{2}{\sin(\pi x)}, \quad (0 < x < 1), \tag{52}$$

のようにコンパクトな形にまとめることもできる。

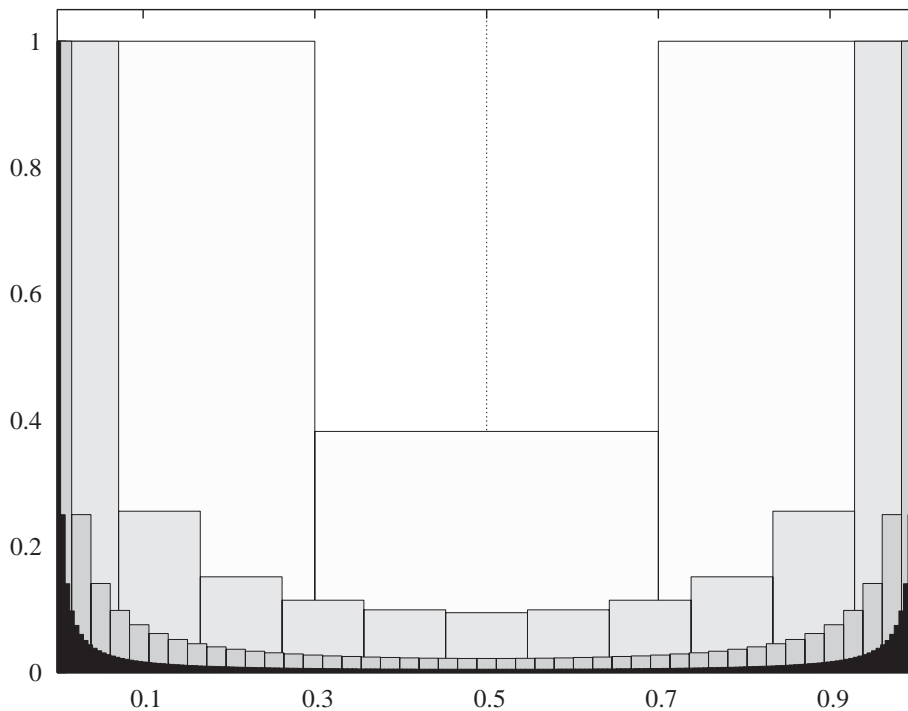


図 43: 準古典極限  $\phi = 1/\text{整数}$  の系列での波動関数

一方 Incommensurate 極限に近づく系列においては波動関数に関してもきれいな分岐則が見て取れる。

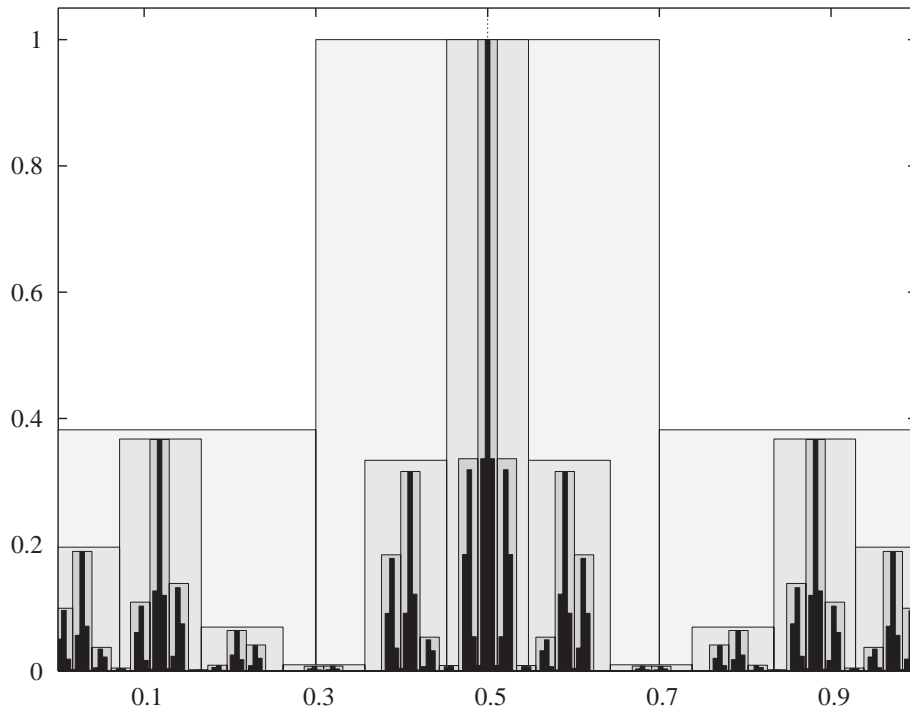


図 44: フィボナッチ数から作った Incommensurate 極限に収束する系列での波動関数の振幅

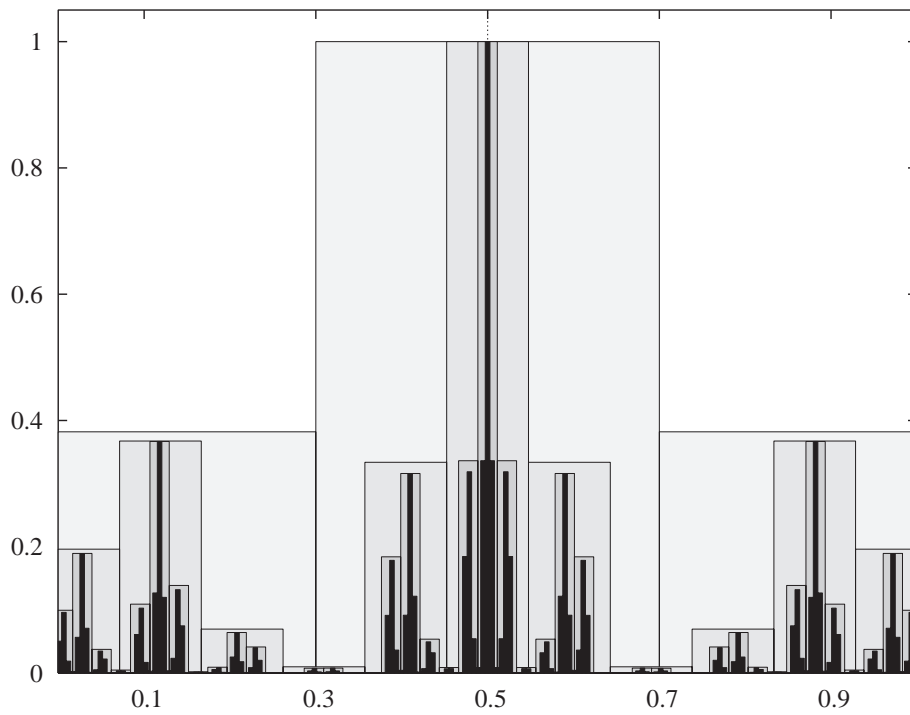


図 45: 図 44 の拡大図

なおこの波動関数に対応して関数方程式型のシュレディンガー方程式の解を作る多項式はその係数がマルチフラクタルとなるものが現れることを最後に注意しておく。

このあといくつかの重要な進展があるがそれについては講義でふれたい。