

## 2 量子ホール効果と磁場中の電子系

### 2.1 量子ホール効果とは

量子ホール効果 [1, 2, 3, 4, 5] とは文字どおりホール伝導度が量子化される現象でその実験的発見に対して K.V.Klitzing にノーベル賞があたえられています。驚くべきはその精度でそれが6桁以上の精度を持つというのです。伝導度ですから電流/電圧なわけで電流と電圧をはかって例えば  $34.51231 / 17.25616 = 1.999999\dots$ 、 $67.88631 / 22.62876 = 3.000001$  となったら「これは普通でないなんかがある」、というわけです。こんなぐあいに整数の値にホール伝導度が極めて近くなる現象を 整数量子ホール効果といい、ある場合には、この値が  $14.512 / 43.535 = 0.3333\dots$  等と整数/奇数に極めて近くなるを分数量子ホール効果といいます。この現象の特異なところは、結果がとてもきれいな数になるので一見して何かの物理量を摂動論とか  $\circ \times$  近似で計算するという定量的な議論では不十分だと感じるわけです。つまりこの現象は、何らかの形で整数がらみの理論がその裏にあることを示唆していると思いませんか。そして実際、量子ホール効果とは系の細部に依存しない境界が何個あるか、どんなぐあいつながってるかといった物理系の位相的性質にのみ依存した形で理論としてきれいにまとめ、それが ある意味で現実にも実験として観測にかかっている (と信じられている) 非常にまれな現象なのです。

### 2.2 磁場中の電子系

最初に一様磁場  $\vec{B}$  中の粒子の量子力学について復習しよう [9]。

まず、古典的なローレンツ力に従う電子 (電荷  $-e$ ) のニュートン方程式を導くハミルトニアンが次のものであることに注意して

$$H = \frac{1}{2m} \left( \vec{p} + \frac{e}{c} \vec{A} \right)^2$$

(量子力学における) ハミルトニアンとしてつぎのものをとろう。

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2m} \vec{\Pi}^2 \\ \vec{\Pi} &= -i\hbar \vec{\nabla} + \frac{e}{c} \vec{A} \\ \vec{B} &= \text{rot } \vec{A} \end{aligned}$$

ここで磁場を  $z$  方向にとって

$$H = \frac{1}{2m} (\hat{z} \times \vec{\Pi})^2 = \frac{1}{2m} (\Pi_x^2 + \Pi_y^2)$$

とする。<sup>2</sup> ここで  $\vec{\Pi}$  の成分間の交換子を計算すると<sup>3</sup>

$$\left[ \frac{\ell_B}{\hbar} \Pi_x, \frac{\ell_B}{\hbar} \Pi_y \right] = -i$$

<sup>2</sup> $\epsilon_{ijk} \partial_j A_k = (\hat{z})_i B$   
<sup>3</sup>

$$\begin{aligned} [\Pi_i, \Pi_j] &= [-i\hbar \partial_i + \frac{e}{c} A_i, -i\hbar \partial_j + \frac{e}{c} A_j] = -i \frac{e\hbar}{c} \left( [\partial_i, A_j] + [A_i, \partial_j] \right) \\ &= -i \frac{e\hbar}{c} \left( \partial_i A_j - \partial_j A_i \right) \end{aligned}$$

$$[\Pi_x, \Pi_y] = -i \frac{e\hbar}{c} B = -i \left( \frac{\hbar}{\ell_B} \right)^2, \quad \ell_B = \sqrt{\frac{\hbar c}{eB}}$$

ここで

$$\ell_B = \sqrt{\frac{\hbar c}{eB}}$$

は長さの次元を持つ量で磁気長と呼ばれる。この交換関係より

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\ell_B}{\hbar} (\Pi_y + i\Pi_x)$$

として演算子  $a$  を定義すれば  $[a, a^\dagger] = 1$  であり、<sup>4</sup> ハミルトニアンは<sup>5</sup>

$$H = \hbar\omega_c \left( n_a + \frac{1}{2} \right), \quad n_a = a^\dagger a$$

$$\omega_c = \frac{eB}{mc} : \text{サイクロトロン周波数}$$

と書ける。これは1つの調和振動子のハミルトニアンである。

一方

$$R_x = x - \frac{\ell^2}{\hbar} \Pi_y$$

$$R_y = y + \frac{\ell^2}{\hbar} \Pi_x$$

を定義するとこれらはハミルトニアンと可換であり<sup>6</sup>

$$[H, R_x] = [H, R_y] = 0$$

4

$$[a, a^\dagger] = \frac{\ell_B^2}{2\hbar^2} \left( [\Pi_y, -i\Pi_x] + [i\Pi_x, \Pi_y] \right) = 1$$

5

$$\Pi_x = \frac{\hbar}{\ell_B} \frac{1}{i\sqrt{2}} (a - a^\dagger)$$

$$\Pi_y = \frac{\hbar}{\ell_B} \frac{1}{\sqrt{2}} (a + a^\dagger)$$

より

$$H = \frac{1}{2m} \frac{\hbar^2}{2\ell_B^2} \left( -(a - a^\dagger)^2 + (a + a^\dagger)^2 \right) = \frac{1}{2m} \frac{\hbar^2}{\ell_B^2} (aa^\dagger + a^\dagger a)$$

$$= \hbar\omega_c \left( a^\dagger a + \frac{1}{2} \right)$$

$$\omega_c = \frac{\hbar}{m\ell_B^2} = \frac{eB}{mc}$$

<sup>6</sup>まず  $[x, \Pi_x] = [y, \Pi_y] = i\hbar$ ,  $[x, \Pi_y] = [y, \Pi_x] = 0$  よって

$$[\Pi_x, R_x] = \left[ \Pi_x, x - \frac{\ell^2}{\hbar} \Pi_y \right] = -i\hbar - \hbar(-i) = 0$$

$$[\Pi_x, R_y] = \left[ \Pi_x, y + \frac{\ell^2}{\hbar} \Pi_x \right] = 0$$

$$[\Pi_y, R_x] = \left[ \Pi_y, x - \frac{\ell^2}{\hbar} \Pi_y \right] = 0$$

$$[\Pi_y, R_y] = \left[ \Pi_y, y + \frac{\ell^2}{\hbar} \Pi_x \right] = -i\hbar + \hbar(i) = 0$$

運動の定数となる。<sup>7</sup>

よって観測量となるエルミート演算子  $R_x$  または  $R_y$  がハミルトニアンと可換となり、一つのエネルギー状態は異なる量子数を持つことを意味する。すなわち各エネルギーは縮退していることとなる。この縮退をランダウ縮退という。(特に系の大きさが  $\ell_B$  を単位にマクロな系ではこの縮退度はマクロなものとなる。)

さらに磁気並進演算子  $T(\vec{\lambda})$  を

$$T_x(\vec{\lambda}) = e^{\frac{i}{\hbar} \vec{\lambda} \cdot \vec{\Pi}}$$

とすれば<sup>8</sup>

$$T(a\hat{x})^{-1}T(b\hat{y})^{-1}T(a\hat{x})T(b\hat{y}) = e^{2\pi \frac{\text{囲む面積} \times B}{\Phi_0}}$$

すなわち並進操作により閉じた曲線を動くときに得る位相は囲む面積あたりの磁束を磁束単位で計ったもの ( $\times 2\pi$ ) となることに注意しておこう [10]。

以下有名な2つのゲージについて少し議論しよう。

- ランダウゲージ

$$\vec{A} = B(0, x, 0)$$

---

7

$$\begin{aligned} [R_x, R_y] &= \left[ x - \frac{\ell^2}{\hbar} \Pi_y, y + \frac{\ell^2}{\hbar} \Pi_x \right] \\ &= \frac{\ell^2}{\hbar} ([x, \Pi_x] - [\Pi_y, y]) - \left( \frac{\ell^2}{\hbar} \right)^2 [\Pi_y, \Pi_x] = \frac{\ell^2}{\hbar} 2i\hbar - \frac{\ell^4}{\hbar^2} i \frac{\hbar^2}{\ell_B^2} \\ &= i\ell_B^2 \end{aligned}$$

$$\left[ \frac{R_x}{\ell_B}, \frac{R_y}{\ell_B} \right] = i$$

よって

$$b = \frac{1}{\ell_B} \frac{1}{\sqrt{2}} (R_x + iR_y)$$

とすると

$$[b, b^\dagger] = \frac{1}{2\ell_B^2} ([R_x, -iR_y] - [iR_y, R_x]) = 1$$

さらに

$$\begin{aligned} n_b &= \frac{1}{2\ell_B} (R_x - iR_y)(R_x + iR_y) = \frac{1}{2\ell_B} \left( R_x^2 + R_y^2 + i[R_x, R_y] - i[R_y, R_x] \right) \\ &= \frac{R_x^2 + R_y^2}{2\ell_B} - 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R^2 &\equiv R_x^2 + R_y^2 = 2\ell_b^2(n_b + 1) \\ n_b &= b^\dagger b \end{aligned}$$

<sup>8</sup> $[A, B] = \text{定数のとき } e^A e^B = e^{[A, B]} e^B e^A$  を使って

$$\begin{aligned} T(a\hat{x})T(b\hat{y}) &= e^{-ab \frac{1}{\hbar^2} [\Pi_x, \Pi_y]} T(b\hat{y})T(a\hat{x}) \\ -ab\hbar^2 [\Pi_x, \Pi_y] &= iab \frac{1}{\ell_B^2} \\ &= 2\pi i \frac{abB}{\Phi_0} \end{aligned}$$

としよう。このとき最低エネルギー状態状態 (最低ランダウ準位) は  $a|\psi\rangle = 0$  を満たすから<sup>9</sup>

$$\begin{aligned}\psi(x, y) &= e^{-ik_y y - \frac{(x - \ell_B^2 k_y)^2}{2\ell_B^2}} \\ R_y \psi &= \ell_B^2 k_y \psi\end{aligned}$$

となり、異なる

$$R_y b = \ell_B^2 k_y$$

の状態が縮退した状態を与えることとなる。これらは  $x$  方向には  $\ell_B^2 k_y$  に局在した波動関数となる。ここで全系が  $L_x \times L_y$  の有限系とし、 $y$  方向には周期的であり、 $x$  方向には  $0 < R_y < L_x$  のもののみ許されるとすればその縮退度  $N_\phi$  は

$$\begin{aligned}N_\phi &= \frac{k_y^{max}}{\Delta k_y} = \frac{L_x / \ell_B^2}{2\pi / L_y} \\ &= \frac{L_x L_y}{2\pi \ell_B^2} = \frac{L_x L_y}{2\pi \frac{\hbar c}{eB}} \\ &= \frac{BS}{\Phi_0}\end{aligned}$$

となる。ここで  $S = L_x L_y$  は全面積

$$\Phi_0 = \frac{hc}{e}$$

は磁束単位とよばれる。すなわちランダウ準位の縮退度は系を貫く全磁束を磁束単位で計ったものとなる。

- 対称ゲージ

$$\vec{A} = \frac{1}{2}B(-y, x, 0)$$

---

9

$$\Pi_x = -i\hbar\partial_x, \quad \Pi_y = -i\hbar\partial_y + \frac{eB}{c}x = \hbar(-i\partial_x + \frac{x}{\ell_B^2})$$

$$R_x = x - \frac{\ell_B^2}{\hbar}\Pi_y = x - \ell_B^2(-i\partial_y + \frac{x}{\ell_B^2}) = i\ell_B^2\partial_y$$

$$a = \frac{\ell_B}{\sqrt{2\hbar}}(\Pi_y + i\Pi_x) = \ell_B(-i\partial_y + \frac{x}{\ell_B^2} + \partial_x)$$

$$(-i\partial_y + \frac{x}{\ell_B^2} + \partial_x)\psi = 0$$

より  $\psi(x, y) = e^{-ik_y y} f(x)$  として

$$f' - (k_y - \frac{x}{\ell_B^2})f = 0$$

$$f(x) = e^{-\frac{1}{2}(\frac{x}{\ell_B^2} - k_y)^2}$$

$$\psi(x, y) = e^{-ik_y y} e^{-\frac{(x - \ell_B^2 k_y)^2}{2\ell_B^2}}$$

とすると<sup>10</sup>  $a|\psi\rangle = (\Pi_y + i\Pi_x)|\psi\rangle = 0$  より  $(\partial_{\bar{z}} + \frac{z}{4e\ell_B^2})\psi = 0$  から

$$\psi(z, \bar{z}) = P(z) e^{-\frac{|z|^2}{4\ell_B^2}}$$

となり  $P(z)$  の選び方でランダウ縮退が生じる。<sup>11</sup>

### 2.3 格子上磁場下の電子系

次に格子間隔を  $a$  とした格子上で磁場中の電子系を議論したい。[11, 12, 13, 14, 15, 18] 以下わかるようにこのように格子上で議論を行うことにより境界条件、状態の数え上げ等が簡単になる。また通常の連続空間での議論も適当なスケールング極限 ( $a \rightarrow 0$ ) の下で再現する [21]。

10

$$\begin{aligned}\Pi_x &= -i\hbar\partial_x - \frac{1}{2}\frac{y}{\ell_B^2} = \hbar(-i\partial_x - \frac{1}{2}\frac{y}{\ell + B^2}) \\ \Pi_y &= -i\hbar\partial_y + \frac{1}{2}\frac{x}{\ell_B^2} = \hbar(-i\partial_y + \frac{1}{2}\frac{x}{\ell + B^2}) \\ \Pi_y + i\Pi_x &= \hbar(-i\partial_y + \frac{1}{2}\frac{x}{\ell + B^2} + \partial_x - i\frac{1}{2}\frac{y}{\ell + B^2}) = \hbar\left((\partial_x - i\partial_y) + \frac{1}{2\ell_B^2}(x - iy)\right) \\ &= \hbar\left(2\partial_{\bar{z}} + \frac{z}{2e\ell_B^2}\right)\end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned}z &= x - iy, \quad \bar{z} = x + iy \\ x &= \frac{1}{2}(z + \bar{z}), \quad y = \frac{1}{-2i}(z - \bar{z}) \\ \partial_{\bar{z}} &= \frac{\partial x}{\partial \bar{z}}\partial_x + \frac{\partial y}{\partial \bar{z}}\partial_y = \frac{1}{2}(\partial_x - i\partial_y) \\ \partial_z &= \frac{\partial x}{\partial z}\partial_x + \frac{\partial y}{\partial z}\partial_y = \frac{1}{2}(\partial_x + i\partial_y)\end{aligned}$$

11

$$\begin{aligned}b &= \frac{1}{\sqrt{2}\ell_B}(R_x + iR_y) = \frac{1}{\sqrt{2}\ell_B}\left(x - \frac{\ell_B^2}{\hbar}\Pi_y + i\left(y + \frac{\ell_B^2}{\hbar}\Pi_x\right)\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{(x + iy)}{\ell_B} - \frac{\ell_B}{\hbar}(\Pi_y - i\Pi_x)\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{(x + iy)}{\ell_B} - \frac{\ell_B}{\hbar}(i\partial_y + \frac{1}{2}\frac{\hbar}{\ell_B^2}x + \partial_x + i\frac{1}{2}\frac{\hbar}{\ell_B^2}y)\right) \\ &= 2\ell_B\left(\frac{\bar{z}}{4\ell_B^2} - \partial_z\right)\end{aligned}$$

より  $b|\psi\rangle = 0$  とすると

$$\psi = \text{定数} \times e^{-\frac{|z|^2}{4\ell_B^2}}$$

この状態に対して

$$\begin{aligned}b^\dagger &= \frac{1}{\sqrt{2}\ell_B}(R_x - iR_y) = \frac{1}{\sqrt{2}\ell_B}\left(x - \frac{\ell_B^2}{\hbar}\Pi_y - i\left(y + \frac{\ell_B^2}{\hbar}\Pi_x\right)\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{(x - iy)}{\ell_B} - \frac{\ell_B}{\hbar}(\Pi_y + i\Pi_x)\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{(x - iy)}{\ell_B} - \frac{\ell_B}{\hbar}(i\partial_y + \frac{1}{2}\frac{\hbar}{\ell_B^2}x - \partial_x - i\frac{1}{2}\frac{\hbar}{\ell_B^2}y)\right) \\ &= 2\ell_B\left(\frac{z}{4\ell_B^2} - \partial_{\bar{z}}\right)\end{aligned}$$

の作用は

$$b^\dagger|\psi\rangle = z|\psi\rangle$$

となる。

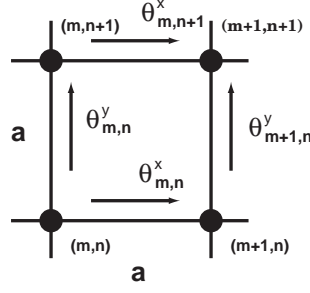


図 1: リンクに割り当てる位相とプラケットあたりの磁束

まず、第二量子化した表示で次のハミルトニアンを考える。

$$H = -t \sum_{\langle ij \rangle} (c_i^\dagger e^{i\theta_{ij}} c_j + h.c.) + V(\{n_k\})$$

ここで  $c_i$  は 2次元格子上  $i$  サイトの電子の消滅演算子で  $\{c_i, c_j^\dagger\} = \delta_{ij}$ 、 $V$  は電子の粒子数 (演算子)  $n_k = c_k^\dagger c_k$  により書ける項で乱れのポテンシャル及び、電子間相互作用はこの項に含まれるが、以下当面のところ相互作用も乱れもない  $V = 0$  の場合を考えよう。  $\theta_{ij}$  は  $j$  サイトから  $i$  サイトに電子が飛び移るとき受ける位相の変化でベクトルポテンシャル  $\vec{A}(\vec{r})$  と次のように関係するものとする。

$$\theta_{ij} = -\frac{e}{c\hbar} \int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_j} d\vec{r} \vec{A}(\vec{r}) = -2\pi \frac{1}{\Phi_0} \int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_j} d\vec{r} \vec{A}(\vec{r}), \quad \Phi_0 = \frac{hc}{e}$$

なお  $\Phi_0$  は磁束単位と呼ばれる。これが磁気並進演算子  $T_x, T_y$  を使って以下のように書けることにまず注意しよう。

$$\begin{aligned} H &= H_0 + V \\ H_0 &= -t(T_x + T_x^\dagger + T_y + T_y^\dagger) \\ T_x &= \sum_{m,n} c_{m+1,n}^\dagger e^{i\theta_{m,n}^x} c_{m,n} \\ T_y &= \sum_{m,n} c_{m,n+1}^\dagger e^{i\theta_{m,n}^y} c_{m,n} \end{aligned}$$

特に位相を図 1 のようにとった場合

$$\begin{aligned} \theta_{m,n}^x &= \frac{e}{c\hbar} a A_x(m + \frac{1}{2}, n) + o(a) \\ \theta_{m,n}^y &= \frac{e}{c\hbar} a A_y(m, n + \frac{1}{2}) + o(a) \end{aligned}$$

となり

$$\sum_{\text{Plaquette } P=(m+\frac{1}{2}, n+\frac{1}{2})} \theta = \theta_{m,n}^x + \theta_{m+1,n}^y - \theta_{m,n+1}^x - \theta_{m,n}^y = 2\pi\phi_{P=(m+\frac{1}{2}, n+\frac{1}{2})}$$

と定めると  $a$  について展開して  $a$  について最低次で

$$\phi_P = -\frac{e}{2\pi c\hbar} a^2 (\partial_x A_y - \partial_y A_x) = -\frac{Ba^2}{\Phi_0}$$

となる。これから物理量  $\phi_P$  はプラケット  $P$  での  $xy$  2次元平面に垂直な磁束を磁束量子  $\Phi_0$  を単位として計ったものと考えよう ( $\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$ )。

この格子系の系は  $\{\varphi_i\}$  を任意として次のようなユニタリ変換 (局所ゲージ変換) で不変であることに注意しよう。

$$\begin{aligned} c_i &\rightarrow c_i' = c_i e^{i\varphi_i}, & \{c_i', c_j'^{\dagger}\} &= \delta_{ij} \\ \theta_{ij} &\rightarrow \theta'_{ij} = \theta_{ij} + \varphi_i - \varphi_j \\ H(\{c_i, \theta_{ij}\}) &= H(\{c_i', \theta'_{ij}\}) \end{aligned}$$

ただし各位相  $\theta_{ij}$  そのものには不定性があるが、 $\phi_P$  は確定する。またこれがユニタリ変換であることから観測量はすべて不変である。

次にこの格子系の一粒子のシュレディンガー方程式  $H|E\rangle = E|E\rangle$ ,  $|E\rangle = \sum_{m,n} \psi_{m,n} c_{m,n}^{\dagger} |0\rangle$  を考えると ( $V=0$  の時)

$$-t(e^{i\theta_{m-1,n}^x} \psi_{m-1,n} + e^{-i\theta_{m,n}^x} \psi_{m+1,n} + e^{i\theta_{m,n-1}^y} \psi_{m,n-1} + e^{-i\theta_{m,n}^y} \psi_{m,n+1}) = E\psi_{m,n}$$

となりこの波動関数についても

$$\psi_{m,n} = \psi(\vec{r}) = \psi(ma, na)$$

として  $a$  について 2次まで展開すると

$$-\frac{1}{2m} \left( \frac{\hbar}{i} \vec{\nabla} + \frac{e}{c} \vec{A} \right)^2 \psi(\vec{r}) = \epsilon \psi(\vec{r})$$

と連続空間における 磁場中のシュレディンガー方程式が得られる。ただしここで  $\epsilon = \frac{\hbar^2}{2mta^2} (E - 4t)$  である (確認せよ)。

ここでこの系の一粒子エネルギーを計算してみよう。まず、位相の選び方つまり、ゲージとしてランダウゲージ

$$\theta_{m,n}^x = 0, \theta_{m,n}^y = 2\pi\phi m$$

をとり、 $\phi$  として  $\phi = \frac{p}{q}$ ,  $p, q$  は互いに素な整数としよう。さらに境界条件としては  $L_x \times L_y$  の系で周期的境界条件をとる。

ここでこのゲージでは  $x$  方向に周期は  $q$  であることから運動量空間の演算子  $\bar{c}_1(K_x, k_y), \dots, \bar{c}_q(K_x, k_y)$  を次のように導入する。 ( $L_x$  は  $q$  で割り切れるとしよう。)

$$\begin{aligned} c_{m,n} &= c_{qm'+m'',n} = \frac{1}{\sqrt{L_x/q}} \frac{1}{\sqrt{L_y}} \sum_{K_x, k_y} e^{iK_x m' + ik_y n} \bar{c}_{m''}(K_x, k_y) \\ m &= qm' + m'', \quad m' = 1, \dots, L_x/q, \quad m'' = 1, \dots, q \\ K_x &= 2\pi \frac{n_x}{L_x/q}, \quad n_x = 1, \dots, L_x/q \\ k_y &= 2\pi \frac{n_y}{L_y}, \quad n_y = 1, \dots, L_y \end{aligned}$$

ここで  $\bar{c}_i(K_x, k_y)$  は  $\{\bar{c}_i(K_x, k_y), \bar{c}_j^{\dagger}(K'_x, k'_y)\} = \delta_{n_x, n'_x} \delta_{n_y, n'_y}$  等を満たすフェルミ演算子であり、 $K_x \in [0, 2\pi]$ ,  $k_y \in [0, 2\pi]$ ,  $\Delta K_x = \frac{2\pi}{L_x/q}$ ,  $\Delta k_y = \frac{2\pi}{L_y}$  である。ここで  $K_x = qk_x$  とし ( $\Delta k_x = \frac{2\pi}{L_x}$ )、 $c_j(k_x, k_y) = \bar{c}_j(qk_x, k_y)$  とすると  $x$  方向のとりうる波数は

$$k_x \in \left[0, \frac{2\pi}{q}\right], \quad k_y \in [0, 2\pi]$$

であり、ブリルアンゾーンが  $1/q$  になっている。これはゲージを固定する際に実空間の周期が  $q$  倍になったことを反映しており、磁氣的ブリルアンゾーンと呼ばれる。なおフェルミ演算子の周期は  $N, M$  を任意の整数として

$$c_j(k_x + N\frac{2\pi}{q}, k_y + M2\pi) = c_j(k_x, k_y)$$

であり、磁氣的ブリルアンゾーン上  $x, y$  各方向に  $0$  と  $2\pi/q$ 、 $0$  と  $2\pi$  を同一視するわけで磁氣的ブリルアンゾーンはトーラス  $T_{MBZ}$  と見なせることに注意しよう。

このとき並進演算子は

$$\mathbf{c}(\vec{k}) = \begin{pmatrix} c_1(\vec{k}) \\ \vdots \\ c_q(\vec{k}) \end{pmatrix}$$

をもちいて

$$\begin{aligned} T_x &= \sum_{k_x, k_y} \mathbf{c}^\dagger(\vec{k}) \begin{pmatrix} 0 & & e^{-iqk_x} \\ 1 & 0 & \\ & \ddots & \ddots \\ & & 1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{c}(\vec{k}) \\ &= L_x L_y \int_{T_{MBZ}} \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \mathbf{c}^\dagger(\vec{k}) \begin{pmatrix} 0 & & e^{-iqk_x} \\ 1 & 0 & \\ & \ddots & \ddots \\ & & 1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{c}(\vec{k}) \\ T_y &= \sum_{k_x, k_y} \mathbf{c}^\dagger(\vec{k}) e^{-ik_y} \text{diag}(e^{i2\pi\phi}, \dots, e^{i2q\pi\phi}) \mathbf{c}(\vec{k}) \\ &= L_x L_y \int_{T_{MBZ}} \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \mathbf{c}^\dagger(\vec{k}) e^{-ik_y} \text{diag}(e^{i2\pi\phi}, \dots, e^{i2q\pi\phi}) \mathbf{c}(\vec{k}) \end{aligned}$$

<sup>12</sup> となる。よってハミルトニアンは

$$\begin{aligned} H &= (-t) L_x L_y \int_{T_{MBZ}} \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \mathbf{c}^\dagger(\vec{k}) \mathbf{H}_0(\vec{k}) \mathbf{c}(\vec{k}) \\ \mathbf{H}_0(\vec{k}) &= \begin{pmatrix} 2 \cos(k_y - 2\pi\phi) & 1 & 0 & \dots & e^{-iqk_x} \\ 1 & 2 \cos(k_y - 4\pi\phi) & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \cos(k_y - 6\pi\phi) & 1 & \vdots \\ 0 & \ddots & \dots & \dots & \vdots \\ e^{iqk_x} & 0 & \dots & 1 & 2 \cos(k_y - 2\pi q\phi) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となる。

以下詳しく議論する前に基本的な事実を確認しておこう。まず、ハミルトニアンがフェルミ演算子について2次形式であることから、1粒子固有状態はバンドインデックス  $\ell = 1, \dots, q$  を持つ

$$\sum_{K_x, k_y} = \sum_{k_x, k_y} = \frac{1}{\Delta k_x \Delta k_y} \int_0^{2\pi/q} dk_x \int_0^{2\pi} dk_y = L_x L_y \int_0^{2\pi/q} \frac{dk_x}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{dk_y}{2\pi} = L_x L_y \int_{T_{MBZ}} \frac{d^2k}{(2\pi)^2}$$



ロッシ関数  $|\psi^\ell(\vec{k})\rangle$  で与えられる。

$$\begin{aligned} H|\psi^\ell(\vec{k})\rangle &= E^\ell(\vec{k})|\psi^\ell(\vec{k})\rangle \\ |\psi^\ell(\vec{k})\rangle &= \sum_j c_j^\dagger \psi_j^\ell |0\rangle \\ \psi^\dagger(\vec{k}) \mathbf{H}_0(\vec{k}) \psi(\vec{k}) &= \text{diag}(E^1(\vec{k}), \dots, E^q(\vec{k})) \end{aligned}$$

ここで各バンドごとの規格化されたブロッホ関数を列ベクトルとしてならべた係数行列  $\psi = (\psi^1, \dots, \psi^q)$  はユニタリである。

まず特定のフラックスに対してエネルギーバンドを書いてみよう。図参照。

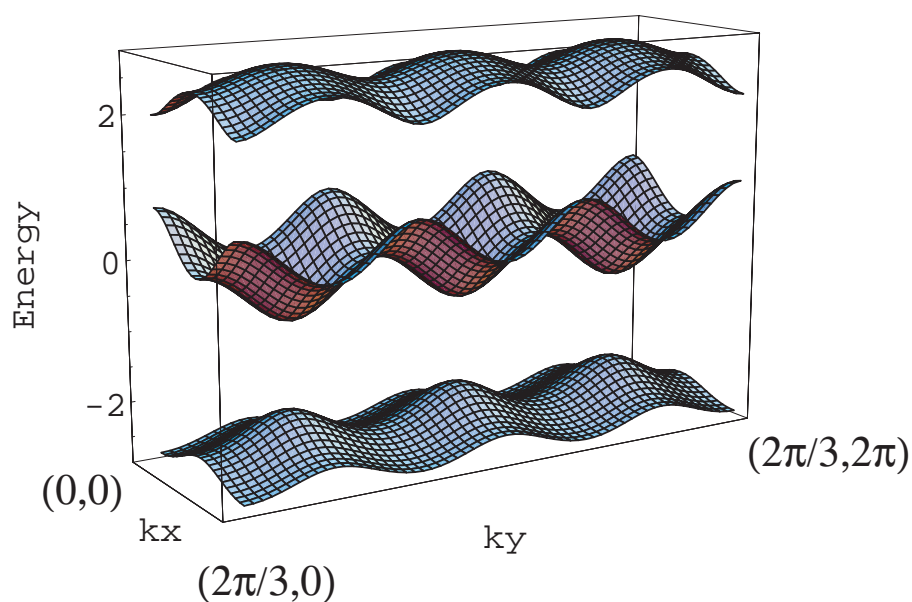


図 2:  $\phi = \frac{1}{3}$  の時のエネルギー分散

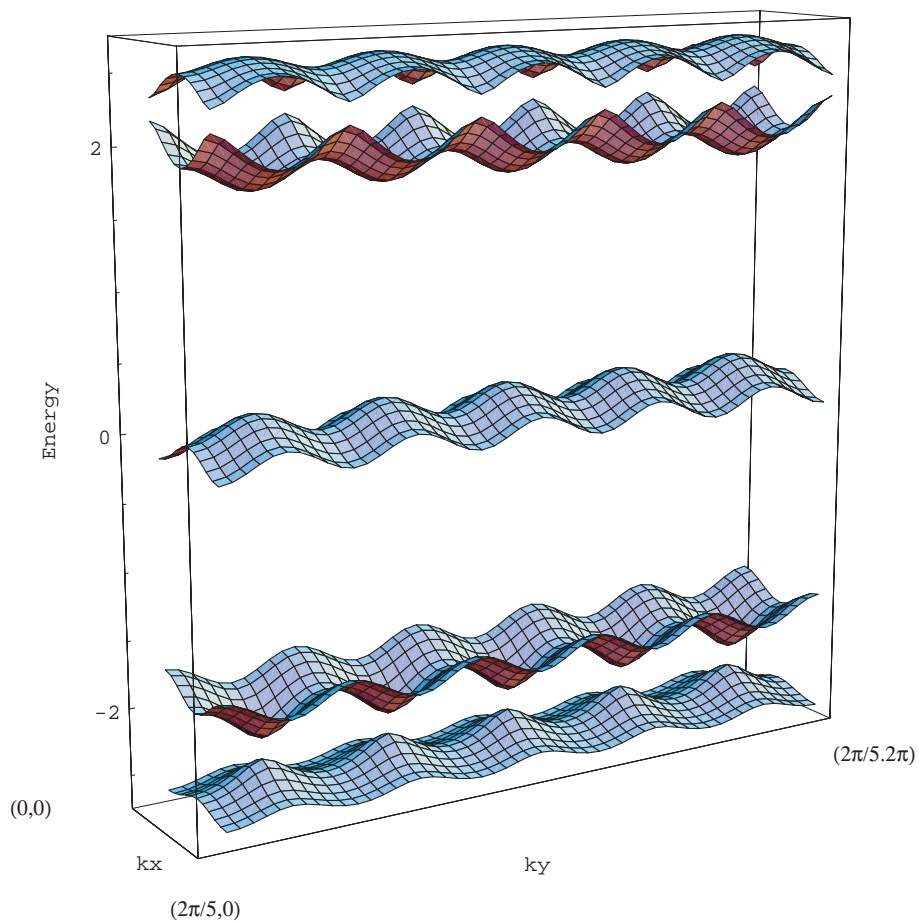


図 3:  $\phi = \frac{2}{5}$  の時のエネルギー分散

さらにこの系のスペクトル  $E^b(\vec{k})$  を  $\phi$  を変えながら図示したものがフラクタル構造として有名な Hofstadter のバタフライである。(図 4) [11, 12, 13, 14]

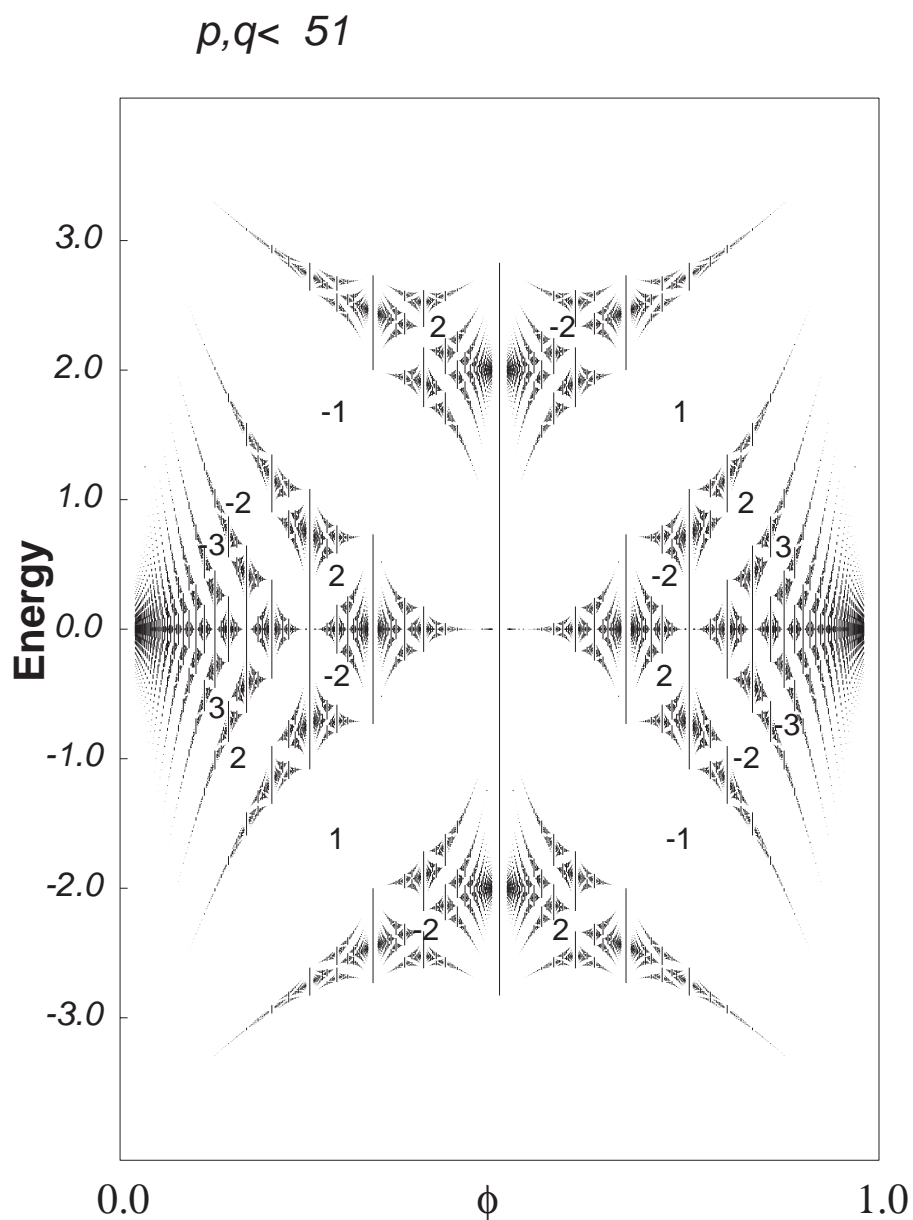


図 4: 格子上磁場中のフェルミ粒子系の一粒子エネルギー: Hofstadter のバタフライ。図中の整数はフェルミエネルギーがそのエネルギーギャップにある時のホール伝導度 ( $e^2/h$  を単位として) である。[16]

このスペクトルの特徴はハミルトニアンからわかるように  $\phi = \frac{p}{q}$  ( $p, q$  整数) のときエネルギーバンドが  $q$  個に分かれていることにあり、見ての通り至る所に入れ子構造がありフラクタルとなっている。[12]<sup>13</sup>

さらに弱磁場の極限を考えると (この弱磁場の極限では磁束当たりのプラケット数が非常に多く格子の効果が見えなくなり連続体が再現される。)  $\phi = \frac{1}{q}$  ( $q \rightarrow \infty, \phi \rightarrow 0$ ) のとき非常にバン

<sup>13</sup>この構造がなぜ生じるかはあとで議論するとしてここではそれをまず認めてさきに進もう。

ド幅が狭い (以下のスケーリング極限でもそのバンド幅は 0 のままでそれがランダウ縮退に対応する。) バンドが  $\phi$  を変えたとき数本の直線として図に現れているのがわかる。その直線は  $n$  を自然数として  $E_n = \text{const.} + \Delta n \phi$  と書け定数をのぞいて  $\frac{E_n}{\phi} \sim \Delta n$  となる。これは、バンド幅が非常に狭いこととあわせて、弱磁場の極限での等間隔のエネルギーギャップをもつランダウ準位の形成を示している。ここで更に有限系での状態数を数えてみよう。1 辺  $L$  の有限な 2 次元系を考えるとサイト数は  $L^2$  あり全一粒子状態も当然  $L^2$  個ある。よって  $q$  個のエネルギーバンドの領域は  $L^2/q$  個ずつの状態を含む。つまり弱磁場の極限でランダウ準位の縮退度は  $L^2/q$  となる。一方ブライケット当たりの磁束が  $1/q$  だから系全体を貫く全磁束は  $N_\phi = L^2/q$  となり、ランダウ準位の縮退度は系を貫く全磁束として与えられることとなる。このランダウ準位当たり (全磁束当たり) の電子数  $N_e$ 、 $\nu = \frac{N_e}{N_\phi} = \frac{N_e}{L^2/q}$  をランダウ準位の占有率と呼び、量子ホール効果で重要な量である。