

— 物性基礎論、統計力学特論 レポート —

〆切 2 月 21 日正午 (提出先物工教務) (本レポート問題のコピーも教務室にて配布)

以下の問題に答えよ。全てに答えられない場合はその一部でも答えよ。(最後の問は必ず)。問題、講義に関する疑問質問は 204 号 (2F) 初貝まで

- I. 次のハミルトニアン H で記述される 1 次元調和振動子に関して以下の問に答えよ。ただし記述はできるだけ初等的かつ自己完結的に細部の計算まで示せ。

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$$

- I.1 密度行列 $\rho(\beta) = e^{-\beta H}$ の経路積分による次の表式を具体的に計算せよ。

$$\rho(\beta) = \int Dx e^{-\frac{1}{\hbar} \int_0^{\beta\hbar} d\tau \left(\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 \right)}$$

ただし境界条件は虚数時間を τ として $x(\tau = 0) = a$, $x(\tau = \beta\hbar) = b$ とせよ。

- I.2 [I.1] の結果を用い調和振動子の自由エネルギー F を求めよ。 ($e^{-\beta F} = \text{Tr } e^{-\beta H}$)
 I.3 経路積分によらず何か他の手法で調和振動子の自由エネルギー F を求め比較せよ。

- II 二次元 Ising モデルの自由エネルギーに関する次の表式から臨界点近傍での比熱の振舞を考えよう。

$$\begin{aligned} f &= -\frac{1}{N\beta} \log \left(\frac{1}{2^N} \text{Tr } e^{\beta \sum \sigma_i \sigma_j} \right) \\ &= -\frac{1}{2\beta} \int_0^{2\pi} \frac{dk_x}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{dk_y}{2\pi} \log \left[\cosh^2 2\beta - \sinh 2\beta (\cos k_x + \cos k_y) \right] \end{aligned}$$

ここで N はサイト数である。

- II.1 波数空間での積分が特異性を持ちうるのは \log の内部がゼロとなるところに原因があることに注意し臨界点の温度 β_C をもとめよ。
 II.2 自由エネルギー f を β 臨界点 β_C の周りで展開し更に被積分関数を波数空間の特異点周りで展開して評価することにより自由エネルギーが臨界点近傍で

$$f \approx \text{Const.} \left| 1 - \frac{\beta}{\beta_C} \right|^2 \log \left| 1 - \frac{\beta}{\beta_C} \right| + (\text{正則な項})$$

と書けることを示せ。

- II.3 臨界点近傍の比熱の発散の様子を議論せよ。

- III. 講義の感想、要望等を記せ。