演習問題 8 :回転群とその表現 (2020) 初貝，吉田 (恒)

配布してある公式集を参照しながら以下の問いに答えよ。

問題 1. $|\boldsymbol{n}| = 1$ なる 3 次元の実ベクトル $\boldsymbol{n}$ に対して，次の関係式を順に導こう。なお $P_\pm = \frac{1}{2}(E_2 \pm \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\sigma})$ とする。

$$e^{-i\frac{\theta}{2}\hat{\boldsymbol{n}}\cdot\boldsymbol{\sigma}} = E_2\cos\frac{\theta}{2} - i\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}\sin\frac{\theta}{2}$$

(1) $\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\sigma} = P_+ - P_-$ を示せ。

(2) $P_+ + P_- = E_2$ を示せ。

(3) $P_\pm^2 = P_\pm$ を示せ。

(4) $P_+P_- = P_-P_+ = 0$ を示せ。

(5) $P_+ + P_- = E_2$ を示せ。

(6) $(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\sigma})^2 = P_1 + P_2$ を示せ。

(7) $n = 0, 1, 2, \cdots$ に対して $(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\sigma})^n = P_1 + (-1)^n P_2$ を示せ。

(8) $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ なる関数 $f(x)$ に関して $f(a\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}) = f(a)P_+ + f(-a)P_-$ を示せ。

(9) $e^{-i\frac{\theta}{2}\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}} = e^{-i\frac{\theta}{2}}P_+ + e^{i\frac{\theta}{2}}P_-$ を示せ。

(10) $e^{-i\frac{\theta}{2}\hat{\boldsymbol{n}}\cdot\boldsymbol{\sigma}} = E_2\cos\frac{\theta}{2} - i\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}\sin\frac{\theta}{2}$ を示せ。

問題 2. $u \in SU(2)$ (u は $u^\dagger = u^{-1}$ をみたす 2×2 行列）として $\sigma'_x = u\sigma_x u^\dagger$, $\sigma'_y = u\sigma_y u^\dagger$, $\sigma'_z = u\sigma_z u^\dagger$ とする。

$$\begin{pmatrix} \sigma'_x \\ \sigma'_y \\ \sigma'_x \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_x \\ \sigma_z \end{pmatrix}$$

と書いたとき $Q \in SO(3)$ を示そう。

(1) $\sigma_x^2 = E_2$, $\sigma_y^2 = E_2$, $\sigma_z^2 = E_2$ を示せ。

(2) $i \neq j$ に対して $\sigma'_i\sigma'_j = i\epsilon_{ijk}\sigma'_k$ を示せ。

(3) $\sigma_x^\dagger = \sigma_x$, $\sigma_y^\dagger = \sigma_y$, $\sigma_z^\dagger = \sigma_z$ を示せ。

(4) $\{\sigma'_i, \sigma'_j\} = 2\delta_{ij}$ を示せ。

(5) $\mathrm{Tr}\sigma'_x = \mathrm{Tr}\sigma'_y = \mathrm{Tr}\sigma'_z = 0$ を示せ。よって $\sigma'_i = Q_{ij}\sigma_j$ と展開できる。

(6) $\{\sigma'_i, \sigma'_j\} = Q_{ii'}Q_{jj'}\{\sigma_{i'}, \sigma_{j'}\}$ を示せ。

(7) $Q_{ik}Q_{jk} = \delta_{ij}$ を示せ。よって $Q\tilde{Q} = E_3$，つまり Q は直交行列である。

(8) $\sigma_1'\sigma_2'\sigma_3' = u\sigma_1\sigma_2\sigma_3 u^\dagger = iE_2$ を示せ。

(9) 次の各行の変形を説明せよ

$$\begin{aligned}
\sigma_1'\sigma_2'\sigma_3' &= Q_{1\alpha}Q_{2\beta}Q_{3\gamma}\sigma_\alpha\sigma_\beta\sigma_\gamma && (1)\\
&= \sum_\gamma \left[\sum_{\alpha(=\beta)} (Q_{1\alpha}Q_{2\alpha})Q_{3\gamma}\sigma_\gamma + \sum_{\alpha\neq\beta} Q_{1\alpha}Q_{2\beta}Q_{3\gamma}\sigma_\alpha\sigma_\beta\sigma_\gamma\right] && (2)\\
&= \sum_{(\alpha,\beta,\gamma)=P(123)} Q_{1\alpha}Q_{2\beta}Q_{3\gamma}\sigma_\alpha\sigma_\beta\sigma_\gamma && (3)\\
&= \sum_{(\alpha,\beta,\gamma)=P(123)} Q_{1\alpha}Q_{2\beta}Q_{3\gamma} iE_2\epsilon_{\alpha\beta\gamma} && (4)\\
&= iE_2 \det Q && (5)
\end{aligned}$$

よって $\det Q = 1$ であり $Q \in SO(3)$ である。（直交行列で行列式 1）

問題 3. 以下の球面調和関数の加法定理を用いて，多重極展開を書き直そう。

$$\frac{4\pi}{2\ell+1}\sum_m Y_{\ell m}(\hat{\Omega})Y^*_{\ell m}(\hat{\Omega}') = P_\ell(\hat{\Omega}\cdot\hat{\Omega}')$$

局所的な電荷分布 $\rho(\boldsymbol{r})$ が十分遠方に作る静電ポテンシャルを $\phi(\boldsymbol{r})$ とすれば，以下のようになる。

$$\phi(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int d^3r' \frac{\rho(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}$$

$|\boldsymbol{r}| > R_0$ において $\rho(\boldsymbol{r}) = 0$ となる R_0 がある（局所的）とき，次の関係式を導け。

$$\begin{aligned}
\phi(\boldsymbol{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum_{\ell m}\frac{4\pi}{2\ell+1}\frac{q_{\ell m}}{r^{\ell+1}}Y_{\ell m}(\hat{\boldsymbol{r}})\\
q_{\ell m} &= \int d^3r'\,(r')^\ell \rho(\boldsymbol{r}')Y^*_{\ell m}(\hat{\boldsymbol{r}}')
\end{aligned}$$

ただし，下記の関係式を用いて良い。

$$\begin{aligned}
\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} &= \frac{1}{\sqrt{\boldsymbol{r}^2+\boldsymbol{r}'^2-2\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r}'}} = \frac{1}{r_>}\frac{1}{\sqrt{1-2(\frac{r_<}{r_>})\cos\theta+(\frac{r_<}{r_>})^2}}\\
&= \sum_{\ell=0}^\infty \frac{r_<^\ell}{r_>^{\ell+1}}P_\ell(\cos\theta)
\end{aligned}$$

ここで $\boldsymbol{r}$ と $\boldsymbol{r}'$ がなす角の大きさが θ であり、$r_>$ は $|\boldsymbol{r}|$ と $|\boldsymbol{r}'|$ の大きい方 $r_<$ は小さい方である。