# 演習問題 6 :角運動量の合成 2 (2020)　初貝，吉田 (恒)

2 つの角運動量 $j_1$ と $j_2$ の合成を考え，対応する Clebsch-Gordan(CG) 係数を求めよう。以下 $\hbar=1$ とする。ここで記号を簡単にするために，講義に従い $|m_1\rangle|m_2\rangle \equiv |m_1\rangle_1 \otimes |m_2\rangle_2 = |j_1 m_1 j_2 m_2\rangle$ と書く。以下未定義の記号は講義に従い適切に解釈せよ。最終ページの公式集の結果を用いて良い。

**問題 I** CG 係数について，$m \neq m_1+m_2$ の時，$\langle j_1 m_2 j_2 m_2 | jm\rangle = 0$ となることを示せ。（ヒント $|jm\rangle = \sum_{m_1', m_2'} |j_1 m_1' j_2 m_2'\rangle\langle j_1 m_1' j_2 m_2' | jm\rangle$ に対して $J_z = J_{1z}+J_{2z}$ を各辺に作用させてから左から $\langle j_j m_1 j_2 m_2|$ をかける。）

**問題 II** [1] 2 つの角運動量 $j_1 = 1$ と $j_2 = 1/2$ として $m = m_1+m_2$ が一定の基底 $\Psi_m$ と $J_-$ に関する変換則は次のようになる。なお $|m_1\rangle_1$, $|m_2\rangle_2$, $(m_i = -j_i, \cdots, j_i, i=1,2)$ が規格直交化されているので，$\Psi_{\frac{3}{2}}^\dagger \Psi_{\frac{3}{2}} = \Psi_{-\frac{3}{2}}^\dagger \Psi_{\frac{3}{2}} = 1$, $\Psi_{\frac{1}{2}}^\dagger \Psi_{\frac{1}{2}} = \Psi_{-\frac{1}{2}}^\dagger \Psi_{\frac{1}{2}} = E_2$(2 次元単位行列) である。

$$\Psi_{\frac{3}{2}} = (|1\rangle|\frac{1}{2}\rangle), \qquad J_-\Psi_{\frac{3}{2}} = \Psi_{\frac{1}{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2}\end{pmatrix} \tag{1}$$

$$\Psi_{\frac{1}{2}} = (|1\rangle|-\frac{1}{2}\rangle, |0\rangle|\frac{1}{2}\rangle), \qquad J_-\Psi_{\frac{1}{2}} = \Psi_{-\frac{1}{2}}\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 1\end{pmatrix} \tag{2}$$

$$\Psi_{-\frac{1}{2}} = (|-1\rangle|\frac{1}{2}\rangle, |0\rangle|-\frac{1}{2}\rangle), \qquad J_-\Psi_{-\frac{1}{2}} = \Psi_{-\frac{3}{2}}(1, \sqrt{2}) \tag{3}$$

$$\Psi_{-\frac{3}{2}} = (|-1\rangle|-\frac{1}{2}\rangle), \qquad J_-\Psi_{-\frac{3}{2}} = 0 \tag{4}$$

(a) $J_-|1\rangle|\frac{1}{2}\rangle = \sqrt{2}|0\rangle|\frac{1}{2}\rangle + |1\rangle|-\frac{1}{2}\rangle$ を導き，変換則 (1) を示せ。

(b) $J_-|1\rangle|-\frac{1}{2}\rangle = \sqrt{2}|0\rangle|-\frac{1}{2}\rangle$ を示せ。

(c) $J_-|0\rangle|\frac{1}{2}\rangle = \sqrt{2}|-1\rangle|\frac{1}{2}\rangle + |0\rangle|-\frac{1}{2}\rangle$ を示し，(b) とともに変換則 (2) を示せ。以下変換則 (1)-(4) は既知とせよ。

[2] $|t\rangle = |1\rangle|\frac{1}{2}\rangle$ について $J_+|t\rangle = 0, J_z|t\rangle = |t\rangle\frac{3}{2}$ であることを示せ。これから $|\frac{3}{2}\frac{3}{2}\rangle = |1\rangle|\frac{1}{2}\rangle = \Psi_{\frac{3}{2}}$ となる。

(a) $\langle 11\frac{1}{2}\frac{1}{2}|\frac{3}{2}\frac{3}{2}\rangle$ を求めよ。

(b) $j = \frac{3}{2}$ の時の公式より $|\frac{3}{2}\frac{1}{2}\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}J_-|\frac{3}{2}\frac{3}{2}\rangle$ となる。これから $|\frac{3}{2}\frac{1}{2}\rangle = \Psi_{\frac{1}{2}}\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{6}}{3}\end{pmatrix}$ を示し，$\langle 1m_1\frac{1}{2}m_2|\frac{3}{2}\frac{1}{2}\rangle$ が 0 でないものをその値とともに列挙せよ。

(c) $|\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\rangle = \frac{1}{2}J_-|\frac{3}{2}\frac{1}{2}\rangle$ から $|\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\rangle = \Psi_{-\frac{1}{2}}\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{6}}{3}\end{pmatrix}$ を示し，$\langle 1m_1\frac{1}{2}m_2|\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\rangle$ が 0 でないものをその値とともに列挙せよ。

(d) $|\frac{3}{2}-\frac{3}{2}\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}J_-|\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\rangle$ から $|\frac{3}{2}-\frac{3}{2}\rangle = \Psi_{-\frac{3}{2}}$ を示し $\langle 1m_1\frac{1}{2}m_2|\frac{3}{2}-\frac{3}{2}\rangle$ が 0 でないものをその値とともに列挙せよ。

[3] $|v\rangle = |\frac{3}{2}\frac{1}{2}\rangle$, に対して $|v\rangle$ 方向への射影演算子を $P = |v\rangle\langle v|$ とする。

(a) 任意の $|t\rangle$ に対して $|v_\perp\rangle = (1-P)|t\rangle = |t\rangle - |v\rangle\langle v|t\rangle$ とすると $\langle v|v_\perp\rangle = 0$ となることを示せ。なお $|\frac{3}{2}\frac{1}{2}\rangle$ は規格化されている。

(b) $|t\rangle = \Psi_{\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ として $\langle v|t\rangle$ を求めよ。

(c) 上記の $|t\rangle$ に対して $|v_\perp\rangle$ を求めよ。

(d) $|\frac{1}{2}\frac{1}{2}\rangle = |v_\perp\rangle \frac{1}{\sqrt{\langle v_\perp|v_\perp\rangle}}$ を $\Psi_{\frac{1}{2}}$ を用いて表せ。

(e) $\langle 1m_1\frac{1}{2}m_2|\frac{1}{2}\frac{1}{2}\rangle$ が 0 でないものをその値とともに列挙せよ。

(f) $|\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\rangle = J_-|\frac{1}{2}\frac{1}{2}\rangle$ であることから $|\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\rangle = \Psi_{-\frac{1}{2}}x$ と書いてベクトル $x$ を求めよ。

(g) $\langle 1m_1\frac{1}{2}m_2|\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\rangle$ が 0 でないものをその値とともに列挙せよ。

問題 III （余裕のある人への自習問題。提出は必須としない。） $j_1 = j_2 = 1$ の場合の合成に関して，CG 係数を求めよ。（一部でも可）なお $m$ 一定の基底とその変換はつぎの通り。これらは既知として良い。

$$\begin{aligned}
\Psi_2 &= (|1\rangle|1\rangle) \\
\Psi_1 &= (|1\rangle|0\rangle, |0\rangle|1\rangle) \\
\Psi_0 &= (|1\rangle|-1\rangle, |0\rangle|0\rangle, |-1\rangle|1\rangle) \\
\Psi_{-1} &= (|-1\rangle|0\rangle, |0\rangle|-1\rangle) \\
\Psi_{-2} &= (|-1\rangle|-1\rangle)
\end{aligned}$$

$$J_-\Psi_2 = (J_{1-} + J_{2-})(|1\rangle|1\rangle) = (\sqrt{2}|0\rangle|1\rangle + \sqrt{2}|1\rangle|0\rangle) = \Psi_1 \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} \tag{5}$$

$$\begin{aligned}
J_-\Psi_1 &= (J_{1-} + J_{2-})(|1\rangle|0\rangle, |0\rangle|1\rangle) = (\sqrt{2}|0\rangle|0\rangle + \sqrt{2}|1\rangle|-1\rangle, \sqrt{2}|-1\rangle|1\rangle + \sqrt{2}|0\rangle|0\rangle) \\
&= \Psi_0 \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{6}$$

$$\begin{aligned}
J_-\Psi_0 &= (J_{1-} + J_{2-})(|1\rangle|-1\rangle, |0\rangle|0\rangle, |-1\rangle|1\rangle)) \\
&= (\sqrt{2}|0\rangle|-1\rangle, \sqrt{2}|-1\rangle|0\rangle + \sqrt{2}|0\rangle|-1\rangle, \sqrt{2}|-1\rangle|0\rangle)) \\
&= \Psi_{-1} \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{7}$$

$$\begin{aligned}
J_-\Psi_{-1} &= (J_{1-} + J_{2-})(|-1\rangle|0\rangle, |0\rangle|-1\rangle) = (\sqrt{2}|-1\rangle|-1\rangle, \sqrt{2}|-1\rangle|-1\rangle) \\
&= \Psi_{-2}(\sqrt{2}, \sqrt{2})
\end{aligned} \tag{8}$$

$$J_-\Psi_{-2} = 0 \tag{9}$$

- $\epsilon_{ijk}\epsilon_{ij'k'} = \delta_{jj'}\delta_{kk'} - \delta_{jk'}\delta_{kj'}$, $\epsilon_{ijk}\epsilon_{ijk'} = 2\delta_{kk'}$
- $(\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B})_i = \epsilon_{ijk} A_j B_k$
- 座標 $\boldsymbol{r}$ 運動量 $\boldsymbol{p}$ に対して，$[r_i, p_j] = i\hbar\delta_{ij}$ である。
- $[AB, C] = A[B, C] + [A, C]B$, $[A, BC] = B[A, C] + [A, B]C$.
- 角運動量の上昇下降演算子

$$\begin{aligned} J_+|j, m\rangle &= \hbar\sqrt{(j-m)(j+m+1)}|j, m+1\rangle, \\ J_-|j, m\rangle &= \hbar\sqrt{(j+m)(j-m+1)}|j, m-1\rangle, \end{aligned}$$

特に $j = \frac{1}{2}$ の場合

$$J_+|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle = 0, J_+|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle = \hbar|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle, \quad J_-|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle = \hbar|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle, \quad J_-|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle = 0$$

特に $j = 1$ の場合

$$J_+|1, m\rangle = \hbar\sqrt{(1-m)(2+m)}|1, m+1\rangle, \quad J_-|1, m\rangle = \hbar\sqrt{(1+m)(2-m)}|1, m-1\rangle$$

$$\begin{aligned} &J_+|1, 1\rangle = 0, \qquad J_+|1, 0\rangle = \hbar\sqrt{2}|1, 1\rangle, \quad J_+|1, -1\rangle = \hbar\sqrt{2}|1, 0\rangle \\ &J_-|1, 1\rangle = \hbar\sqrt{2}|1, 0\rangle, J_-|1, 0\rangle = \hbar\sqrt{2}|1, -1\rangle, J_-|1, -1\rangle = 0 \end{aligned}$$

特に $j = \frac{3}{2}$ の場合

$$J_+|\frac{3}{2}, m\rangle = \hbar\sqrt{(\frac{3}{2}-m)(\frac{5}{2}+m)}|\frac{3}{2}, m+1\rangle, \quad J_-|\frac{3}{2}, m\rangle = \hbar\sqrt{(\frac{3}{2}+m)(\frac{5}{2}-m)}|\frac{3}{2}, m-1\rangle$$

$$J_+|\frac{3}{2}\frac{3}{2}\rangle = 0,\ J_+|\frac{3}{2}\frac{1}{2}\rangle = \hbar\sqrt{3}|\frac{3}{2}\frac{3}{2}\rangle,\ J_+|\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\rangle = \hbar 2|\frac{3}{2}\frac{1}{2}\rangle,\ J_+|\frac{3}{2} - \frac{3}{2}\rangle = \hbar\sqrt{3}|\frac{3}{2}\frac{1}{2}\rangle,$$

$$J_-|\frac{3}{2}\frac{3}{2}\rangle = \hbar\sqrt{3}|\frac{3}{2}\frac{1}{2}\rangle,\ J_-|\frac{3}{2}\frac{1}{2}\rangle = \hbar 2|\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\rangle,\ J_-|\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\rangle = \hbar\sqrt{3}|\frac{3}{2} - \frac{3}{2}\rangle,\ J_-|\frac{3}{2} - \frac{3}{2}\rangle = 0$$

特に $j = 2$ の場合

$$J_+|2, m\rangle = \hbar\sqrt{(2-m)(3+m)}|2, m+1\rangle, \quad J_-|2, m\rangle = \hbar\sqrt{(2+m)(3-m)}|2, m-1\rangle$$

$$\begin{aligned} &J_+|2, 2\rangle = 0, \qquad J_+|2, 1\rangle = \hbar 2|2, 2\rangle, \qquad J_+|2, 0\rangle = \hbar\sqrt{6}|2, 1\rangle, \\ &\qquad J_+|2, -1\rangle = \hbar\sqrt{6}|2, 0\rangle, J_+|2, -2\rangle = \hbar 2|2, -1\rangle, \\ &J_-|2, 2\rangle = \hbar 2|21\rangle, \quad J_-|2, 1\rangle = \hbar\sqrt{6}|2, 0\rangle, \quad J_-|2, 0\rangle = \hbar\sqrt{6}|2, -1\rangle, \\ &\qquad J_-|2, -1\rangle = \hbar 2|2, 0\rangle, \quad J_-|2, -2\rangle = 0 \end{aligned}$$

- パウリ行列

$$\sigma_x = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},\ \sigma_y = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix},\ \sigma_z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\sigma_i\sigma_j = -\sigma_j\sigma_i = i\epsilon_{ijk}\sigma_k\ (i \neq j),$$
$$\sigma_i^2 = E_2$$
$$(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{\sigma})(\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{\sigma}) = (\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B})E_2 + i\boldsymbol{\sigma} \cdot (\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B})$$