演習問題 5 :角運動量の合成 1 (2020) 初貝，吉田 (恒)

問題 1. 2 つの $S=1/2$ のスピン $\boldsymbol{S}_i$, $(i=1,2)$ の合成を考えよう。以下 $\hbar=1$ とする。

(1) $\boldsymbol{S}=\boldsymbol{S}_1+\boldsymbol{S}_2$ としたとき、$\boldsymbol{S}$ が角運動量の交換関係をみたすことを示せ。

(2) 以下 $\psi=(|\uparrow_1\uparrow_2\rangle,|\uparrow_1\downarrow_2\rangle,|\downarrow_1\uparrow_2\rangle,|\downarrow_1\downarrow_2\rangle)$ とする。ただし、$S_{i,z}|\uparrow_i\rangle=\frac{1}{2}|\uparrow_i\rangle$, $S_{i,z}|\downarrow_i\rangle=-\frac{1}{2}|\downarrow_i\rangle$, $(i=1,2)$ である。

(a) ψ に関する $S_z=S_{1z}+S_{2z}$ の行列表示 $\psi^\dagger S_z\psi$ を求めその固有値と固有ベクトルを求めよ。

(b) $\boldsymbol{S}^2=\frac{3}{2}+S_{1+}S_{2-}+S_{1-}S_{2+}+2S_{1z}S_{2z}$ を導け。

(c) $\psi^\dagger\boldsymbol{S}^2\psi$ を求めよ。

(d) $\psi^\dagger\boldsymbol{S}^2\psi$ と $\psi^\dagger S_z\psi$ との同時固有ベクトルを求めよ。

(e) 前問の固有ベクトルを用いて $\boldsymbol{S}^2|jm\rangle=j(j+1)|jm\rangle$, $S_z|jm\rangle=m|jm\rangle$ となる $|jm\rangle$ を求めよ。

(3) 以下前問の $|jm\rangle$ を異なる方法で求めよう。

(a) $|A\rangle=|\uparrow_1\uparrow_2\rangle$ としたとき $S_+=S_{1+}+S_{2+}$ に関して $S_+|A\rangle=0$ を示せ。

(b) $S_z=S_{1z}+S_{2z}$ に関して $S_z|A\rangle=|A\rangle$ を示せ。

(c) $|A\rangle=|j=1,m=1\rangle=|11\rangle$ である理由を述べよ。

(d) 公式集を用いて $S_-|11\rangle$ を計算し $|10\rangle$ を求めよ。

(e) $S_-|10\rangle$ を計算し $|1-1\rangle$ を求めよ。

(f) $S_-|1-1\rangle$ を計算せよ。

(g) $|00\rangle=\alpha|\uparrow_1\downarrow_2\rangle+\beta|\downarrow_1\uparrow_2\rangle$ と書けるのはなぜか？理由を述べよ。

(h) $\langle 10|00\rangle=0$ となるのはなぜか

(i) 前問と $\langle 00|00\rangle=1$ から α, β を求めよ。ただし $\alpha>0$ とせよ。

(j) $S_+|00\rangle$ を求めよ。

(k) $S_-|00\rangle$ を求めよ。

(l) α,β を求める一般論について考えよう。$P=|10\rangle\langle 10|$ として $P^2=P=P^\dagger$ を示せ。（射影演算子）

(m) $P|10\rangle$ を計算せよ。

(n) $P'=1-P$ として $(P')^2=P'=(P')^\dagger$ を示せ。

(o) $PP'=P'P=0$ を示せ。

(p) $P'|10\rangle$ を計算せよ。

(q) $|B\rangle=P'|\uparrow_1\downarrow_2\rangle$ として $\langle 10|B\rangle=0$ を示せ。

(r) $S_z|B\rangle$ を計算せよ。

(s) $S_\pm|B\rangle$ を計算せよ。

(t) $|B\rangle$ を規格化して $|00\rangle$ を求めよ。

問題 2. 2 つの角運動量 $\boldsymbol{J}_i$, $\boldsymbol{J}_i^2 = j_i(j_i+1)$ の合成角運動量 $\boldsymbol{J} = \boldsymbol{J}_1 + \boldsymbol{J}_2$, $\boldsymbol{J}^2 = j(j+1)$ を考えよう。ただし、合成スピンの固有状態を $|j,m\rangle$, 各スピンごとの固有状態を $|j_1,m_1,j_2,m_2\rangle = |j_1,m_1\rangle|j_2,m_2\rangle$ と書く。なお $\langle j,m|j,m\rangle = 1$ と規格化する。また，一般の j_1 , j_2 に関して合成運動量 j として可能な値は $j_{\min} = |j_1 - j_2|$, $j_{\max} = j_1 + j_2$ として $j = j_{\min}, j_{\min}+1, \cdots, j_{\max}-1, j_{\max}$ である。

(1) $\boldsymbol{J}$ が角運動量の交換関係を満たすことを示せ。

(2) 状態数に関する以下の関係を確認せよ。

$$\sum_{j=j_{\min}}^{j_{\max}} (2j+1) \quad = \quad (2j_1+1)(2j_2+1)$$

(3) $j_1 = \frac{1}{2}$, $j_2 = \frac{1}{2}$ の時、合成運動量 j として可能な値を列挙し状態数が保存していることを確認せよ。。

(4) $j_1 = \frac{1}{2}$, $j_2 = 1$ の時、合成運動量 j として可能な値を列挙し、 状態数が保存していることを確認せよ。

(5) $j_1 = \frac{1}{2}$, $j_2 = 2$ の時、合成運動量 j として可能な値を列挙し、 状態数が保存していることを確認せよ。

(6) $j_1 = 1$, $j_2 = 1$ の時、合成運動量 j として可能な値を列挙し、 状態数が保存していることを確認せよ。

(7) $j_1 = 2$, $j_2 = 1$ の時、合成運動量 j として可能な値を列挙し、 状態数が保存していることを確認せよ。

(8) $j = 1/2$ のスピンを 3 つ合成したときに現れる全角運動量について述べ、全状態数が保存することを確認せよ。

(9) $j = 1/2$ のスピンを 4 つ合成したときに現れる全角運動量について述べ、全状態数が保存することを確認せよ。

(10) $j = 1/2$ のスピンを 5 つ合成したときに現れる全角運動量について述べ、全状態数が保存することを確認せよ。

- $\epsilon_{ijk}\epsilon_{ij'k'} = \delta_{jj'}\delta_{kk'} - \delta_{jk'}\delta_{kj'}$, $\epsilon_{ijk}\epsilon_{ijk'} = 2\delta_{kk'}$
- $(\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B})_i = \epsilon_{ijk} A_j B_k$
- 座標 $\boldsymbol{r}$ 運動量 $\boldsymbol{p}$ に対して，$[r_i, p_j] = i\hbar\delta_{ij}$ である。
- $[AB, C] = A[B, C] + [A, C]B$, $[A, BC] = B[A, C] + [A, B]C$.
- 角運動量の上昇下降演算子

$$\begin{aligned} J_+|j, m\rangle &= \hbar\sqrt{(j-m)(j+m+1)}|j, m+1\rangle, \\ J_-|j, m\rangle &= \hbar\sqrt{(j+m)(j-m+1)}|j, m-1\rangle, \end{aligned}$$

特に $j = \frac{1}{2}$ の場合

$$J_+|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle = 0, J_+|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle = \hbar|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle, \quad J_-|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle = \hbar|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle, \quad J_-|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle = 0$$

特に $j = 1$ の場合

$$J_+|1, m\rangle = \hbar\sqrt{(1-m)(2+m)}|1, m+1\rangle, \quad J_-|1, m\rangle = \hbar\sqrt{(1+m)(2-m)}|1, m-1\rangle$$

$$\begin{aligned} &J_+|1, 1\rangle = 0, && J_+|1, 0\rangle = \hbar\sqrt{2}|1, 1\rangle, \quad J_+|1, -1\rangle = \hbar\sqrt{2}|1, 0\rangle \\ &J_-|1, 1\rangle = \hbar\sqrt{2}|1, 0\rangle, && J_-|1, 0\rangle = \hbar\sqrt{2}|1, -1\rangle, J_-|1, -1\rangle = 0 \end{aligned}$$

特に $j = \frac{3}{2}$ の場合

$$J_+|\frac{3}{2}, m\rangle = \hbar\sqrt{(\frac{3}{2}-m)(\frac{5}{2}+m)}|\frac{3}{2}, m+1\rangle, \quad J_-|\frac{3}{2}, m\rangle = \hbar\sqrt{(\frac{3}{2}+m)(\frac{5}{2}-m)}|\frac{3}{2}, m-1\rangle$$

$$J_+|\frac{3}{2}\frac{3}{2}\rangle = 0,\ J_+|\frac{3}{2}\frac{1}{2}\rangle = \hbar\sqrt{3}|\frac{3}{2}\frac{3}{2}\rangle,\ J_+|\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\rangle = \hbar 2|\frac{3}{2}\frac{1}{2}\rangle,\ J_+|\frac{3}{2} - \frac{3}{2}\rangle = \hbar\sqrt{3}|\frac{3}{2}\frac{1}{2}\rangle,$$

$$J_-|\frac{3}{2}\frac{3}{2}\rangle = \hbar\sqrt{3}|\frac{3}{2}\frac{1}{2}\rangle,\ J_-|\frac{3}{2}\frac{1}{2}\rangle = \hbar 2|\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\rangle,\ J_-|\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\rangle = \hbar\sqrt{3}|\frac{3}{2} - \frac{3}{2}\rangle,\ J_-|\frac{3}{2} - \frac{3}{2}\rangle = 0$$

- パウリ行列

$$\sigma_x = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},\ \sigma_y = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix},\ \sigma_z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{gathered} \sigma_i\sigma_j = -\sigma_j\sigma_i = i\epsilon_{ijk}\sigma_k\ (i \neq j), \\ \sigma_i^2 = E_2 \\ (\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{\sigma})(\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{\sigma}) = (\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B})E_2 + i\boldsymbol{\sigma} \cdot (\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}) \end{gathered}$$