演習問題 3 :球面調和関数 (2020) 初貝，吉田 (恒)

問題 1. 3 次元極座標

(1) 3 次元極座標を $\boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\phi\sin\theta \\ r\sin\phi\sin\theta \\ r\cos\theta \end{pmatrix}$, $(\Omega = (\theta, \phi))$ として各方向の単位ベクトルを並べた行列 $T = (\boldsymbol{e}_r, \boldsymbol{e}_\theta, \boldsymbol{e}_\phi) \equiv (\frac{1}{h_r}\partial_r\boldsymbol{r}, \frac{1}{h_\theta}\partial_\theta\boldsymbol{r}, \frac{1}{h_\phi}\partial_\phi\boldsymbol{r}) = (\widehat{\partial_r\boldsymbol{r}}, \widehat{\partial_\theta\boldsymbol{r}}, \widehat{\partial_\phi\boldsymbol{r}})$ を求めよ。ただし $h_\alpha = |\partial_\alpha\boldsymbol{r}|$, $(\alpha = r, \theta, \phi)$

(2) $\tilde{T}T = E_3$ から $(\boldsymbol{e}_r, \boldsymbol{e}_\theta, \boldsymbol{e}_\phi)$ が規格直交系 $(\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_j = \delta_{ij})$ を作ることを示せ。

(3) $\boldsymbol{e}_r \times \boldsymbol{e}_\theta = \boldsymbol{e}_\phi$, $\boldsymbol{e}_\theta \times \boldsymbol{e}_\phi = \boldsymbol{e}_t$, $\boldsymbol{e}_\phi \times \boldsymbol{e}_r = \boldsymbol{e}_\theta$ を確認せよ。

(4) $\begin{pmatrix} \partial_r \\ \partial_\theta \\ \partial_\phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \theta} \\ \frac{\partial x}{\partial \phi} & \frac{\partial y}{\partial \phi} & \frac{\partial z}{\partial \phi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} = \mathrm{diag}\,(h_r, h_\theta, h_\phi)\widetilde{T} \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix}$ を導け。

(5) $\boldsymbol{\nabla} = \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} = \boldsymbol{e}_r\partial_r + \boldsymbol{e}_\theta\frac{1}{r}\partial_\theta + \boldsymbol{e}_\phi\frac{1}{r\sin\theta}\partial_\phi$ を導け。

(6) $\boldsymbol{r} = r\boldsymbol{e}_r$ を用いて $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p} = -i\hbar(\boldsymbol{e}_\phi\partial_\theta - \boldsymbol{e}_\theta\dfrac{1}{\sin\theta}\partial_\phi)$ を導け。

問題 2. 球面調和関数を導こう

(1) $L_+ = \hbar e^{i\phi}(\partial_\theta + \mathrm{i}\cot\theta\partial_\phi)$ と $L_- = \hbar e^{-i\phi}(-\partial_\theta + \mathrm{i}\cot\theta\partial_\phi)$ を導け。

(2) $\boldsymbol{L}^2$ と L_z の同時固有状態 $Y_{\ell m}(\Omega) = \langle\Omega|\ell m\rangle$ に対して $Y_{\ell m}(\Omega) = \Theta_{\ell m}(\theta)\Phi_m(\phi)$ と変数分離形を仮定する。$L_zY_{\ell m} = \hbar m Y_{\ell m}$ より $\Phi_m(\phi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{im\phi}$ を導け。ただし $\displaystyle\int_0^{2\pi} d\phi|\Phi_m(\phi)|^2 = 1$ と規格化せよ。

(3) $Y_{\ell m}(\theta,\phi)$ の一価性 $(Y_{\ell m}(\theta,\phi) = Y_{\ell m}(\theta,\phi+2\pi))$ から m が整数となることを導け。

(4) 以下の関係式を導け。

$$\begin{aligned} L_+[e^{im\phi}f(\theta)] &= e^{im\phi}\hbar e^{i\phi}[\frac{df}{d\theta} - mf\cot\theta] \\ L_-[e^{im\phi}f(\theta)] &= -e^{im\phi}\hbar e^{-i\phi}[\frac{df}{d\theta} + mf\cot\theta] \end{aligned}$$

(5) $\frac{d}{d\theta} = -\sin\theta\frac{d}{d\cos\theta}$ と $\frac{d\sin\theta}{d\cos\theta} = -\cot\theta$ を導け。

(6) 以下の関係式を導け。

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\cos\theta}[\sin^{-m}\theta f(\theta)] &= -\sin^{-m-1}\theta[\frac{d}{d\theta} - m\cot\theta]f \\ \frac{d}{d\cos\theta}[\sin^{m}\theta f(\theta)] &= -\sin^{m-1}\theta[\frac{d}{d\theta} + m\cot\theta]f \end{aligned}$$

(7) 以下の関係式を導け

$$\begin{aligned} L_+[e^{im\phi}f(\theta)] &= -\hbar e^{i(m+1)\phi}\sin^{m+1}\theta\frac{d}{d\cos\theta}[\sin^{-m}\theta f(\theta)] \\ L_-[e^{im\phi}f(\theta)] &= \hbar e^{i(m-1)\phi}\sin^{-(m-1)}\theta\frac{d}{d\cos\theta}[\sin^{m}\theta f(\theta)] \end{aligned}$$

(8) 以下の関係式を導け

$$
\begin{aligned}
L_+^k[e^{im\phi}f(\theta)] &= (-\hbar)^k e^{i(m+k)\phi}\sin^{m+k}\theta\left[\frac{d}{d(\cos\theta)}\right]^k[\sin^{-m}\theta f(\theta)] \\
L_-^k[e^{im\phi}f(\theta)] &= \hbar^k e^{i(m-k)\phi}\sin^{-(m-k)}\theta\left[\frac{d}{d\cos\theta}\right]^k[\sin^{m}\theta f(\theta)]
\end{aligned}
$$

(9) $L_+Y_{\ell\ell}=0$ から $\Theta_{\ell\ell}$ が満たす方程式が $\frac{\partial\Theta_{\ell\ell}}{\partial\theta}-\ell\cot\theta\Theta_{\ell\ell}=0$ となることを示せ。

(10) C_ℓ を定数として $\Theta_{\ell\ell}=C_\ell\sin^\ell\theta$ となることを示せ。

(11) $C_\ell=(-)^\ell C'_\ell$, $C'_\ell>0$ と符号を選び、規格化条件 $\displaystyle\int_0^\pi d\theta\,\sin\theta|\Theta_{\ell\ell}(\theta)|^2=1$ より定数 C_ℓ が次のようになることを示せ。

$$
C_\ell = (-)^\ell\sqrt{\frac{(2\ell+1)!}{2}}\frac{1}{2^\ell\ell!}
$$

(12) $Y_{\ell\ell}$ を書け。

(13) $Y_{\ell 0}=\hbar^{-\ell}\frac{1}{\sqrt{(2\ell)!}}L_-^\ell Y_{\ell\ell}$ から $Y_{\ell 0}$ が次のようになることを示せ。

$$
Y_{\ell 0}=\sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}}P_\ell(\cos\theta)
$$

ただしルジャンドル多項式 $P_\ell(t)$ は次のように定義される。

$$
P_\ell(t)=\frac{1}{2^\ell\ell!}\frac{d^\ell}{dt^\ell}(t^2-1)^\ell
$$

(14) $m>0$ に対して $Y_{\ell m}=\hbar^{-m}\sqrt{\frac{\ell!}{(\ell+m)!}\frac{(\ell-m)!}{\ell!}}L_+^m Y_{\ell 0}$ を用いて $Y_{\ell m}$ が次の形になることを示せ。

$$
Y_{\ell m}(\Omega) = (-)^m\sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}\frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}}\sin^m\theta\left[\frac{d}{d\cos\theta}\right]^m P_\ell(\cos\theta)e^{im\phi}
$$

(15) $m'=-m, m>0$ に対して $Y_{\ell -m}=\hbar^{-m}\sqrt{\frac{(\ell-m)!}{\ell!}\frac{\ell!}{(\ell+m)!}}Y_{\ell 0}$ より $Y_{\ell m'}=Y_{\ell -m}$ を次の形に求めよ。

$$
Y_{\ell m'} = Y_{\ell -m}=\sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}\frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}}\sin^m\theta\left[\frac{d}{d\cos\theta}\right]^m P_\ell(\cos\theta)e^{-im\phi}
$$

(16) $m>0$ として $\Theta_{\ell m}$ と $\Theta_{\ell -m}$ の間には $\Theta_{\ell m}=(-)^m\Theta_{\ell -m}$ の関係があることを示せ。

(17) $Y_{\ell m}^*=(-)^m Y_{\ell -m}$, $m>0$ を示せ。

(18) m の正負で分けて次の関係式を確認せよ。

$$Y_{\ell m}(\Omega) \quad = \quad (-)^{\frac{m+|m|}{2}}\sqrt{\frac{2\ell+1}{2}\frac{(\ell-|m|)!}{(\ell+|m|)!}}\frac{e^{\mathrm{i}m\phi}}{\sqrt{2\pi}}P_\ell^{|m|}(\cos\theta)$$

ただし

$$P_\ell^{|m|}(t) = (1-t^2)^{|m|/2}\Big(\frac{d}{dt}\Big)^{|m|}P_\ell(t)$$

である。（ルジャンドル陪関数）

問題 3. ルジャンドル陪関数 $P_\ell^m(t)$ とルジャンドル多項式 $P_\ell(t) = P_\ell^0(t)$

(1) $\boldsymbol{L} = -i\hbar(\boldsymbol{e}_\phi\partial_\theta - \boldsymbol{e}_\theta\frac{1}{\sin\theta}\partial_\phi)$ を用いて次の全角運動量 $\boldsymbol{L}^2$ の極座標表示を導け。

$$\boldsymbol{L}^2 = -\hbar^2\big[\frac{1}{\sin\theta}\partial_\theta(\sin\theta\partial_\theta) + \frac{1}{\sin^2\theta}\partial_\phi^2\big]$$

(2) Y_ℓ^m, $(m \geq 0)$ が $\boldsymbol{L}^2$ の固有値 $\hbar^2\ell(\ell+1)$ の固有関数であることから，ルジャンドルの陪関数が満たす次式を導け。$(t = \cos\theta)$

$$\frac{d}{dt}\big[(1-t^2)\frac{dP_\ell^m(t)}{dt}\big] + \big[\ell(\ell+1) - \frac{m^2}{1-t^2}\big]P_\ell^m(t) = 0$$

(3) ルジャンドル多項式の満たす微分方程式を示せ。

(4) $Y_{\ell m}$ と $Y_{\ell' m}$ との直交関係からルジャンドル陪関数の次の直交関係を示せ。

$$\int_{-1}^{1} dt\, P_{\ell'}^m(t)P_\ell^m(t) = \frac{2}{2\ell+1}2\frac{(\ell+m)!}{(\ell-m)!}\delta_{\ell'\ell}$$

(5) ルジャンドル多項式の直交関係を示せ。