演習問題 2 :角運動量の代数と量子化 (2020) 初貝，吉田 (恒)

問題 1. 基本的な交換子

(1) x の関数 $f(x)$ に対して $\partial_x(xf(x))$ を計算し，それを用いて $[x,\partial_x]f(x)$ を計算せよ。

(2) $[x,p_x]$ を求めよ。

(3) $[x,p_y]$ を計算せよ。(理由も述べよ)

(4) $[r_i,r_j]=A_{ij}\delta_{ij}$, $[p_i,p_j]=B_{ij}\delta_{ij}$, $[r_i,p_j]=C_{ij}\delta_{ij}$, として A_{ij}, B_{ij}, C_{ij}, を求めよ。

(5) 一般の演算子 A,B,C に対して $[AB,C]=A[B,C]+[A,C]B$, $[A,BC]=B[A,C]+[A,B]C$ を示せ.

(6) $\boldsymbol{L}=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p}$ の成分を全て書き出せ。

(7) $H_0=\frac{1}{2m}\boldsymbol{p}^2$, $\boldsymbol{p}=-\mathrm{i}\hbar\boldsymbol{\nabla}$ として, $[H_0,p_x]$ と $[H_0,p_y]$ を計算せよ。

(8) $[H_0,r_x]$ と $[H_0,r_y]$ を計算せよ。

(9) $[H_0,xp_y-yp_x]$ を計算せよ。

(10) $H=\frac{1}{2m}\boldsymbol{p}^2+\frac{1}{2}m\omega^2\boldsymbol{r}^2$, $\boldsymbol{L}=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p}$ として, $[H,L_x]$ を計算せよ。

問題 2. 基本的な交換子

(1) $\boldsymbol{L}=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p}$ の成分を全て書き出せ。

(2) $[L_x,L_y]$ を計算せよ。

(3) $[L_y,L_z]$ を計算せよ。

(4) $[L_z,L_x]$ を計算せよ。

(5) $[\boldsymbol{L}^2,L_z]$ を計算せよ。

(6) $L_a=\epsilon_{abc}r_bp_c$ を用いて $\epsilon_{ijk}L_k=r_ip_j-r_jp_i$ を示せ。

(7) $[L_i,L_j]=\mathrm{i}\hbar\epsilon_{ijk}L_k$ を示せ。

問題 3. 一般の角運動量 J_i, $(i=1,2,3)$, $[J_i,J_j]=\mathrm{i}\hbar\epsilon_{ijk}J_k$ について考えよう。

(1) $\epsilon_{ija}[J_i,J_j]=2(\boldsymbol{J}\times\boldsymbol{J})_a$ を示せ。

(2) $\boldsymbol{J}\times\boldsymbol{J}=\mathrm{i}\hbar\boldsymbol{J}$ を示せ。

(3) c 数の 3 次元ベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ に対して $[\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{J},\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{J}]=\mathrm{i}\hbar(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{J}$ を示せ。

(4) $[\boldsymbol{J}^2,J_x]$ を計算せよ。

(5) $[\boldsymbol{J}^2,J_y]$ を計算せよ。

(6) $[\boldsymbol{J}^2, J_z]$ を計算せよ。

(7) $J_\pm = J_x \pm \mathrm{i}J_y$ に対して $[\boldsymbol{J}^2, J_\pm]$ を計算せよ。

(8) $[J_z, J_\pm] = \pm\hbar J_\pm$ を示せ。

(9) $[J_+, J_-] = 2\hbar J_z$ を示せ。

(10) $J_z^2 = \frac{1}{2}(J_+J_- - J_-J_+)$ を示せ。

(11) 異なる 2 つの角運動量 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ に対して $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} = \frac{1}{2}(A_+B_- + A_-B_+) + A_zB_z$ を示せ。

(12) $\boldsymbol{J}^2 = \frac{1}{2}(J_+J_- + J_-J_+) + J_z^2$ を示せ。

(13) $J_+J_- = \boldsymbol{J}^2 - J_z(J_z - \hbar)$ を示せ [*1]。

(14) $J_-J_+ = \boldsymbol{J}^2 - J_z(J_z + \hbar)$ を示せ [*2]。

問題 4. 角運動量の量子化

(1) $\langle jm|[J_z, J_\pm]|jm'\rangle$ を計算し, $\langle jm|J_\pm|jm'\rangle = 0$, $m - m' \neq \pm 1$ を示せ。

(2) [*1] を用いて $|jm-1\rangle = C_-J_-|jm\rangle$, $C_- > 0$ とし、規格化条件から C_- を定め、$\langle jm-1|J_-|jm\rangle = \hbar\sqrt{(j+m)(j-m+1)}$ を導け。

(3) [*2] を用いて $|jm+1\rangle = C_+J_+|jm\rangle$, $C_+ > 0$ とし、規格化条件から C_+ を定め、$\langle jm+1|J_+|jm\rangle = \hbar\sqrt{(j-m)(j+m+1)}$ を導け。

(4) $\boldsymbol{J}^2 - J_z^2$ の固有値は負にならないことを示せ。

(5) $\boldsymbol{J}^2$ と J_z の規格直交化された同時固有状態 $|j,m\rangle$ を, $\boldsymbol{J}^2|jm\rangle = \hbar^2 j(j+1)|jm\rangle$, $J_z|jm\rangle = \hbar m|jm\rangle$ ととったとき，$-\sqrt{j(j+1)} \leq m \leq \hbar\sqrt{j(j+1)}$ を示せ。

(6) $J_\pm|jm\rangle$ が J_z の固有関数であることを示し、固有値を求めよ。

(7) $J_+|jm_1\rangle = 0$ となる m_1 を求めよ。

(8) $J_-|j-m_2\rangle = 0$ となる m_2 を求めよ。

(9) 許される j の値を求めよ。

(10) j ごとに許される m の値とその個数を述べよ。