演習問題 1 :量子力学における対称性 (2020) 初貝，吉田 (恒)

問題 1. 量子力学におけるユニタリ変換 U に関して考えよう。ただし状態をブラケット記法で $|\psi\rangle$ と書き、状態は $|\psi'\rangle = U|\psi\rangle$ と変換されるとせよ。

(1) ユニタリ変換とは何か述べよ。

(2) $U_\lambda = e^{i\lambda G/\hbar}$ (λ は実) と書いたとき、G がエルミートとなることを示せ。（G は変換の母関数と呼ばれる）

(3) 波動関数の変換 $|\psi\rangle \to |\psi'\rangle$ に対して (エルミート演算子に対応する) 物理量 $\mathcal{O}$ の変換 $\mathcal{O} \to \mathcal{O}'$ を物理量の観測値が元の系と $'$ 系とで、不変であるとして定めよう。これから $\mathcal{O}$ と $\mathcal{O}'$ との関係を導け。

(4) $\lambda = \delta\lambda$ を無限小の物理量とした時 (無限小変換) $\delta\mathcal{O} = \mathcal{O}' - \mathcal{O} = \mathrm{i}\delta\lambda[G, \mathcal{O}]/\hbar$ を $\delta\lambda$ の最低次で導け。よって，物理量 $\mathcal{O}$ の不変性は $[G, \mathcal{O}] = 0$ と書ける。

(5) 時刻 t における任意の物理量 $\mathcal{O}$ の期待値を $\langle\mathcal{O}\rangle_t$ としたとき $\frac{d}{dt}\langle\mathcal{O}\rangle_t = -\mathrm{i}\hbar^{-1}[\mathcal{O}, H]$ を導け。シュレディンガー方程式 $\mathrm{i}\hbar\frac{d}{dt}|\psi\rangle = H|\psi\rangle$ を用いよ。

(6) ハミルトニアン H が上記の無限小変換 $U_{\delta\lambda}$ で不変な時、変換の母関数 G は保存量となることを示せ。

問題 2. 1 次元の波動関数 $\psi(x)$ に関する並進操作 $T_a : x \to x' = x + a$ を考える。

(1) 波動関数の並進を $T_a : \psi \to \psi' = U_a\psi$, $\psi(x) = \psi'(x') = \psi'(x + a)$ とするとき、$y = \psi(x)$ のグラフと $y = \psi'(x)$ のグラフとを実数の適当な ψ を仮定して $x - y$ 平面上に書け。

(2) $U_a = e^{-a\partial_x}$ であることを示せ。

(3) U_a を運動量 $p_x = -\mathrm{i}\hbar\partial_x$ を用いてあらわせ。

(4) 並進の母関数を求めよ。

(5) p_a がエルミートであることを仮定して U_a がユニタリであることを示せ。

(6) 無限小並進 $U_{\delta a}$ に対して $\delta x = -\delta a$ を示せ。

次に 3 次元の無限小並進 $U_{\delta \boldsymbol{a}} = e^{-\mathrm{i}\delta\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{p}/\hbar}$ について考えよう。($\boldsymbol{p} = -\mathrm{i}\hbar\boldsymbol{\nabla}$)

(7) 並進の母関数を求めよ。

(8) $\delta\boldsymbol{r} = U_{\delta\boldsymbol{a}}\boldsymbol{r}U_{\delta\boldsymbol{a}}^{-1} - \boldsymbol{r}$ を ($U_{\delta\boldsymbol{a}}$ の最低次で) 求めよ。

(9) $\delta\boldsymbol{p} = U_{\delta\boldsymbol{a}}\boldsymbol{p}U_{\delta\boldsymbol{a}}^{-1} - \boldsymbol{p}$ を ($U_{\delta\boldsymbol{a}}$ の最低次で) 求めよ。

(10) 質量 m の自由粒子のハミルトニアン $H = \frac{\boldsymbol{p}^2}{2m}$ に対して $\delta H = U_{\delta\boldsymbol{a}}HU_{\delta\boldsymbol{a}}^{-1} - H$ を ($U_{\delta\boldsymbol{a}}$ の最低次で) 求めよ。

(11) 自由粒子に対する運動量保存則を対称性との関連で述べよ。

問題 3. ポテンシャル力 $V(\boldsymbol{r})$ 下の質点のハミルトニアンを $H=\frac{\boldsymbol{p}^2}{2m}+V(\boldsymbol{r})$ と書き，その時間推進を考えよう。

(1) $\psi(t+\delta\tau)=U_{\delta\tau}\psi(t)$ となる $U_{\delta\tau}$ を求め，時間推進の母関数を得よ。

(2) この系のエネルギー保存則を対称性との関連で述べよ。

(3) $V(\boldsymbol{r})=V(r)$ $(r=|\boldsymbol{r}|)$ の時，前問にはない保存則があれば，その理由とともに述べよ。

問題 4. 回転操作 $\boldsymbol{r}\to\boldsymbol{r}'=R\boldsymbol{r}$ について考えよう。ただし実 3 行 3 列の行列 R は単位操作 $R=1$ から連続に変化するものとする。

(1) $|\boldsymbol{r}|=|\boldsymbol{r}'|$ から R が直交行列であることを示せ。

(2) $\det R=1$ を示せ。

(3) 無限小変換 $R=1+\delta R$ に対して δR が反対称行列であることを示せ。

(4) $(\delta R)_{ij}=-\epsilon_{ijk}\delta\omega_k$ と書いて $\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}=\delta\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}$ を導け。

(5) この関係式の幾何学的意味を説明せよ。

(6) $\delta\psi=\psi'(\boldsymbol{r})-\psi(\boldsymbol{r})=-\delta\boldsymbol{\omega}\cdot(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{\nabla})\psi$ を導け。

(7) 無限小の空間回転を $\psi'=U_{\delta\boldsymbol{\omega}}\psi$ と書いたとき $U_{\delta\boldsymbol{\omega}}=e^{-\mathrm{i}\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{L}/\hbar}$, $\boldsymbol{L}=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p}$ となることを示せ。

(8) 角運動量保存則を対称性との関連で述べよ。

(9) z-軸周りの θ 回転の回転行列 $R_z(\theta)$ を以下の手続きで順に求める。$\boldsymbol{r}'=R_z(\theta)\boldsymbol{r}$ である。

(9-i) $\widetilde{\boldsymbol{r}}=(x,y,z)$, $\widetilde{\boldsymbol{r}'}=(x',y',z')$ として $x=\mathrm{Re}\,e^{\mathrm{i}\phi}$, $y=\mathrm{Im}\,e^{\mathrm{i}\phi}$ $x'=\mathrm{Re}\,e^{\mathrm{i}(\phi+\theta)}$, $y'=\mathrm{Im}\,e^{\mathrm{i}(\phi+\theta)}$ となる。R_z を求めよ。

(9-ii) $R_z(\delta\theta)$ を $\delta\theta$ の最低次まで展開し行列 δR を求めよ。

(9-iii) 対応するベクトル $\delta\boldsymbol{\omega}$ を求めよ。

(9-iv) 対応する無限小回転の母関数を求めよ。

(10) 一般論に従い回転に対して物理量 $\mathcal{O}$ は $\delta\mathcal{O}=-\mathrm{i}\delta\omega_i[L_i,\mathcal{O}]/\hbar$ と変換する。ここで $L_i=(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p})_i=\epsilon_{ijk}r_jp_k$。

(10-i) $[r_i,p_j]$ を求めよ。

(10-ii) $[L_i,r_j]$ を求め，$\delta\boldsymbol{r}=-\delta\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}$ を示せ。

(10-iii) $[L_i,p_j]$ を求め，$\delta\boldsymbol{p}=-\delta\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{p}$ を示せ。

(10-iv) $[L_i,L_j]$ を求め，$\delta\boldsymbol{L}=-\delta\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{L}$ を示せ。

(10-v) 逆に $\delta\boldsymbol{V}=-\delta\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{V}$ となる 3 成分の演算子 $\widetilde{\boldsymbol{V}}=(V_x,V_y,V_z))$（ベクトル演算子）に対して $[L_i,V_j]=\mathrm{i}\hbar\epsilon_{ijk}V_k$ を示せ。

(10-vi) 2 つのベクトル演算子 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ に対して $\delta(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})=0$ を示せ（スカラー演算子）。