演習問題 0:量子力学の復習 (2020) 初貝，吉田 (恒)

(†) 以外を解答しスキャンもしくは写真にとった後、pdf 化して manaba にアップロードすることで提出せよ（提出締切 5 月 8 日 12 時）。(†) は自習せよ。

時刻 t に座標 $x = x(t)$ にある質量 m の質点にポテンシャル力 $F = -\partial_x V(x)$ が働く一次元系を考えよう。$(\partial_x = \frac{\partial}{\partial x})$

I. まず古典論で考えよう。

1. Newton の運動方程式を書け。
2. $p = m\dot{x}$ を運動量として，運動エネルギー $K = \frac{p^2}{2m}$，ハミルトニアン $H = K + V$ としたとき，正準方程式 $\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p}, \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x}$ から Newton の運動方程式を導け。
3. (†) A, B を正準変数 x, p の関数として，そのポアソン括弧 $[A, B]_{\mathrm{PB}} = \frac{\partial A}{\partial x}\frac{\partial B}{\partial p} - \frac{\partial A}{\partial p}\frac{\partial B}{\partial x}$ とする。正準方程式が $\dot{x} = [x, H]_{\mathrm{PB}}, \dot{p} = [p, H]_{\mathrm{PB}}$ となることを示せ。
4. (†) 正準変数により物理量が $\mathcal{O}(x, p)$ と与えられているとき，その運動方程式が $\dot{\mathcal{O}} = [\mathcal{O}, H]_{\mathrm{PB}}$ となることを示せ。なお $\mathcal{O}$ の時間依存性は $\mathcal{O}(x(t), p(t))$ と書ける。
5. (†) $[x, x]_{\mathrm{PB}}$, $[x, p]_{\mathrm{PB}}$, $[p, p]_{\mathrm{PB}}$ を計算せよ。

II. 前問に引き続き今度は量子論で考えよう。

1. $p = -\mathrm{i}\hbar\partial_x$ とし，関数 $f = f(x)$ に対して $x(pf)$ と $p(xf)$ を計算することで交換子 $[x, p]$, $[x, x]$, $[p, p]$ を計算せよ。
2. Schrödinger $\mathrm{i}\hbar\partial_t\Psi = H\Psi$ から定常状態 $\Psi = e^{-\mathrm{i}Et/\hbar}\psi(x)$ に対して $\psi(x)$ の満たす方程式を導け。
3. 自由粒子 $(V = 0)$ に対して長さ L の系で周期的境界条件 $\psi(x + L) = \psi(x)$ を課して考えよう。
   (1) $\psi(x) = Ce^{\mathrm{i}kx}$ として E を求めよ。C は定数。
   (2) 規格化条件 $\int_{-L/2}^{L/2} dx\, |\psi(x)|^2 = 1$ から C を求めよ。
   (3) 周期的境界条件から $k = k_n = \frac{2\pi}{L}n$, $n = 0, \pm1, \pm2, \cdots$ となることを導け。
   (4) このときの ψ を ψ_n とせよ。この系に縮退があれば述べよ。

(5) $L \to \infty$ の時，波動関数の完全性 $\sum_n \psi_n(x)\psi_n^*(x') = \delta(x-x')$ を示せ。なお $\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dk\, e^{\mathrm{i}kx} = \delta(x)$ である。$\delta(x)$ はディラックの δ 関数。（ヒント:$F(k)$ を k の任意の関数として、$\Delta k = \frac{2\pi}{L}$ だから $\frac{1}{L}\sum_{n=-\infty}^{\infty} F(k_n) = \frac{\Delta k}{2\pi}\sum_n F(k_n) \to \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dk\, F(k)$）

4. $V(x) = \begin{cases} 0 & |x| \le L/2 \\ +\infty & |x| > L/2 \end{cases}$ とし以下の問いに答えよ。

(1) $\psi(x)$ の満たす境界条件を書き，許される波動関数の概形をいくつか図示せよ。

(2) エネルギーが下から n 番目の固有状態 $\psi_n(x)$ を求めよ。

(3) 各状態に関して $\psi_n(-x) = \lambda_n \psi_n(x)$ を満たす λ_n を示せ。

(4)$^{(\dagger)}$ $L \to \infty$ で $\psi_n(x)$ が完全であることを示せ。

5. $V(x) = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$ とし以下の問いに答えよ。

(1) 古典論の運動方程式から古典的にはどのような運動をするか述べよ。

(2) a を交換関係 $[a, a^\dagger] = 1$ を満たす演算子として $x = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(a^\dagger + a)$, $p = i\sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}}(a^\dagger - a)$ に対して $[x, p] = i\hbar$ を導け。

(3) $H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$ を a で表し $H = \hbar\omega(\hat{n} + 1/2)$, $\hat{n} = a^\dagger a$ を導け。

(4)$^{(\dagger)}$ 任意の演算子 A, B, C に関して $[A, BC] = B[A, C] + [A, B]C$ を示せ。

(5) $|1\rangle = a^\dagger|0\rangle$ に関して $H|1\rangle = E_1|1\rangle$ となることを示し E_1 を求めよ。ただし $a|0\rangle = 0$ である。

(6) $\langle 0|1\rangle = 0$ を示せ。

(7) $|2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2!}}(a^\dagger)^2|0\rangle$ に関して $H|2\rangle = E_2|2\rangle$ となることを示し E_2 を求めよ。

(8) $^{(\dagger)}$ $|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}}(a^\dagger)^n|0\rangle$ に関して $H|n\rangle = E_n|n\rangle$ となる E_n を求めよ。

(9) (2) を a について解き，$a|0\rangle$ から $|0\rangle = \psi_0(x)$ と書いたとき $\psi_0(x)$ の満たす微分方程式を導け。

(10) $\psi_0(x)$ を規格化定数まで含めて求めよ。ただし $\langle n|n'\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \psi_n^*(x)\psi_{n'}(x)$ である。

(11)$^{(\dagger)}$ (2) を $a^\dagger$ について解き，$|1\rangle = \psi_1(x)$ と書いて $\psi_1(x)$ を求めよ。

(12)$^{(\dagger)}$ ψ_1 を用いて $\langle 1|1\rangle = 1$ を確認せよ。

(13)$^{(\dagger)}$ $\psi_n(-x) = \lambda_n \psi_n(x)$ としたときの λ_n を $n = 0, 1$ について求めよ。