7/21 第20回 201710848 有富 洸人

◦ $j = l = 0, 1, 2, \cdots$ の回転行列と球面調和関数

$j = l$ を 0 以上の整数としたとき, $m = 0$, $m' = M$ とおいて,

$$D^{l}_{M0}(\alpha\beta\gamma) = e^{-iM\alpha} \sum_k (-1)^{k+M} \frac{\sqrt{l!\,l!\,(l+M)!\,(l-M)!}}{(l-k)!\,k!\,(k+M)!\,(l-k-M)!} \cdot \cos^{2l-2k-M}\frac{\beta}{2}\ \sin^{2k+M}\frac{\beta}{2}$$

$M = l$ とすると,

$$D^{l}_{l0} = (-1)^l e^{-il\alpha} \frac{\sqrt{(2l)!}}{2^l l!} \sin^l \beta$$

これを球面調和関数 Y_{lm} の定義とくらべると,

$$Y_{ll} = (\beta, \alpha) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}}\ [D^{l}_{l0}(\alpha, \beta)]^*$$

$$Q^{-1} R(\alpha, \beta, \gamma) = R(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0)$$

$$\rightarrow Q\,\psi(R(\alpha,\beta,\gamma)\hat{z}) = \psi(Q^{-1}R(\alpha,\beta,\gamma)\hat{z})$$
$$= \psi(R(\alpha_0,\beta_0,\gamma_0)\hat{z})$$

$$\psi_M(R(\alpha,\beta,\gamma)\hat{z}) \equiv [D^{l}_{MN}(R(\alpha,\beta,\gamma))]^*$$

$$\therefore Q\,\psi_M(R(\alpha,\beta,\gamma)\hat{z}) = \psi_K(R(\alpha,\beta,\gamma)\hat{z})\, D^{l}_{KM}(Q)$$

よって $Y_{\ell\ell}$ での考察から，規格化定数も含めて，
$N=0$ として，

$$Y_{\ell m}(\beta,\alpha) = Y_{\ell m}(R(\alpha,\beta,0)\hat{z})$$

$$= \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}}\,[D^{\ell}_{m0}(\alpha,\beta)]^*$$

$$= \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}}\sum_k (-1)^{k+m}\frac{\ell!\sqrt{(\ell+m)!(\ell-m)!}}{(\ell-k)!k!(k+m)!(\ell-k-m)!}$$

$$\cdot \cos^{2\ell-2k-m}\frac{\beta}{2}\sin^{2k+m}\frac{\beta}{2}\,e^{+im\alpha}$$

特に $Y_{\ell 0}(\beta,\alpha) = \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}}P_\ell(\cos\beta)$ であるから，

$$D^{\ell}_{00}(R(\alpha,\beta,\gamma)) = P_\ell(\cos\beta)$$

オイラー角 $(\phi_0,\theta_0,0)$，$(\phi_1,\theta_1,0)$ に対応する回転を R_0，R_1 とし，$R_0^{-1}R_1 = R_2$ に対応するオイラー角を (Φ,Θ,Γ) とする．

$$D^{\ell}_{00}(R_0^{-1}R_1) = \sum_m D^{\ell}_{0m}(R_0^{-1})D^{\ell}_{m0}(R_1)$$

$$= \sum_m [D^{\ell}_{m0}(R_0)]^* D^{\ell}_{m0}(R_1)$$

$$= D^{\ell}_{00}(R_2)$$

$$\therefore \frac{4\pi}{2l+1} \sum_{m} Y_{lm}(\theta_0, \phi_0) Y_{lm}^{*}(\theta_1, \phi_1) = P_l(\cos\Theta)$$

→ 球面調和関数の加法定理

◦ 局所電荷分布の静電ポテンシャルの多重極展開

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{r_<^l}{r_>^{l+1}} P_l(\cos\theta)$$

$$= 4\pi \sum_{lm} \frac{1}{2l+1} \frac{r_<^l}{r_>^{l+1}} Y_{lm}(\hat{\Omega}) Y_{lm}^{*}(\hat{\Omega}')$$

局所的な電荷分布 $\rho(\mathbf{r})$ が十分遠方に作る
静電ポテンシャルを $\phi(\mathbf{r})$ とすると,

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{lm} \frac{4\pi}{2l+1} \frac{q_{lm}}{r^{l+1}} Y_{lm}(\hat{\mathbf{r}})$$

$$q_{lm} = \int_{|\mathbf{r}'| < R_0} d^3r' (r')^l \rho(\mathbf{r}') Y_{lm}^{*}(\hat{\mathbf{r}}') : \text{多極子}$$