201810841 岡野至仁

回転群のスピン$\frac{1}{2}$表現

$$d^{j}_{m'm}=\sum_k(-)^{k-m+m'}\frac{\sqrt{(j+m)!(j-m)!(j+m')!(j-m')!}}{(j+m-k)!k!(k-m+m')!(j-k-m')!}$$
$$\times\cos^{2j-2k+m-m'}\frac{\beta}{2}\sin^{2k-m+m'}\frac{\beta}{2}$$

$j=\frac{1}{2}$のときは、それぞれのm', mについて

$d^{\frac{1}{2}}_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}=\cos\frac{\beta}{2}$　($k!$と$(-k)!$が存在 → $k=0$)

$d^{\frac{1}{2}}_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}=-\sin\frac{\beta}{2}$

$d^{\frac{1}{2}}_{-\frac{1}{2}\frac{1}{2}}=\sin\frac{\beta}{2}$

$d^{\frac{1}{2}}_{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}=\cos\frac{\beta}{2}$

これを行列形式にまとめると

$$d^{\frac{1}{2}}=\begin{pmatrix}\cos\frac{\beta}{2} & -\sin\frac{\beta}{2}\\ \sin\frac{\beta}{2} & \cos\frac{\beta}{2}\end{pmatrix}$$

よって、

$$D^{\frac{1}{2}}=\begin{pmatrix}e^{-i\frac{1}{2}\alpha} & 0\\ 0 & e^{i\frac{1}{2}\alpha}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\frac{\beta}{2} & -\sin\frac{\beta}{2}\\ \sin\frac{\beta}{2} & \cos\frac{\beta}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e^{-i\frac{1}{2}\gamma} & 0\\ 0 & e^{i\frac{1}{2}\gamma}\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}e^{i\frac{1}{2}(\alpha+\gamma)}\cos\frac{\beta}{2} & -e^{i\frac{1}{2}(\alpha-\gamma)}\sin\frac{\beta}{2}\\ e^{i\frac{1}{2}(\alpha-\gamma)}\sin\frac{\beta}{2} & e^{i\frac{1}{2}(\alpha+\gamma)}\cos\frac{\beta}{2}\end{pmatrix}$$
$$=e^{-i\frac{\alpha}{2}\sigma_z}e^{-i\frac{\beta}{2}\sigma_y}e^{-i\frac{\gamma}{2}\sigma_z}$$

これは$[D^{\frac{1}{2}}]^{-1}=[D^{\frac{1}{2}}]^{\dagger}$を満たす

また、$D^{\frac{1}{2}}\in SU(2)$

$\det D^{\frac{1}{2}}=1$

SU(2)行列に関する公式

$\mathbf{n}\ (|\mathbf{n}|=1)$軸周りの$\theta$回転は

$$e^{-i\frac{\theta}{2}\mathbf{n}\cdot\sigma}=E_2\cos\frac{\theta}{2}-i\mathbf{n}\cdot\sigma\sin\frac{\theta}{2}\in SU(2)$$

ここで、θ回転と$\theta+2\pi$回転について考える

SO(3)ではθ回転と$\theta+2\pi$回転は一致する

SU(2)では

θ回転：$e^{-i\frac{\theta}{2}\mathbf{n}\cdot\sigma}=E_2\cos\frac{\theta}{2}-i\mathbf{n}\cdot\sigma\sin\frac{\theta}{2}$

$\theta+2\pi$回転：$e^{-i\frac{\theta+2\pi}{2}\mathbf{n}\cdot\sigma}=-E_2\cos\frac{\theta}{2}+i\mathbf{n}\cdot\sigma\sin\frac{\theta}{2}$

すなわち、$e^{-i\frac{\theta+2\pi}{2}\mathbf{n}\cdot\sigma}=-e^{-i\frac{\theta}{2}\mathbf{n}\cdot\sigma}$

SO(3) ⇄ SU(2)の対応は1対2であり、これを「$j=\frac{1}{2}$のときの表現は2価である」という。また、この表現を2価表現という

$e^{-i\frac{\theta}{2}\mathbf{n}\cdot\sigma}$の変形を導出する

一般にベクトル$\mathbf{n}\ (|\mathbf{n}|=1)$に対して

$\mathbf{n}\cdot\sigma=P_+-P_-$

$P_\pm=\frac{1}{2}(E_2\pm\mathbf{n}\cdot\sigma)$

$P_\pm^2=P_\pm=P_\pm^{\dagger}$

$P_++P_-=E_2$

$P_+P_-=0$

よって、関数$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$に関して$f(a\mathbf{n}\cdot\sigma)$は

$$(\mathbf{n}\cdot\sigma)^2=(P_+-P_-)^2$$
$$=P_+^2-P_+P_--P_-P_++(-1)^2P_-^2$$
$$=P_++(-1)^2P_-$$
$$(\mathbf{n}\cdot\sigma)^n=P_++(-1)^nP_-$$

より

$$f(a\mathbf{n}\cdot\sigma)=f(a)P_++f(-a)P_-$$

$f(x)=e^{-i\frac{\theta}{2}x}$とすれば

$$e^{-i\frac{\theta}{2}\mathbf{n}\cdot\sigma}=f(\mathbf{n}\cdot\sigma)$$
$$=f(1)P_++f(-1)P_-$$
$$=e^{-i\frac{\theta}{2}}\frac{1}{2}(E_2+\mathbf{n}\cdot\sigma)+e^{i\frac{\theta}{2}}\frac{1}{2}(E_2-\mathbf{n}\cdot\sigma)$$
$$=E_2\cos\frac{\theta}{2}-i\mathbf{n}\cdot\sigma\sin\frac{\theta}{2}$$

SU(2)と3次元球面

$a=e^{-i\frac{1}{2}(\alpha+\gamma)}\cos\frac{\beta}{2}$, $b=-e^{-i\frac{1}{2}(\alpha-\gamma)}\sin\frac{\beta}{2}$とすると

$$D^{\frac{1}{2}}=\begin{pmatrix}a & b\\ -b^* & a^*\end{pmatrix}$$

と書ける(ケーリー・クラインパラメター)

また、4つの実数を$\mathrm{Re}\,\alpha=x_1$, $\mathrm{Im}\,\alpha=x_2$, $\mathrm{Re}\,\beta=x_3$, $\mathrm{Im}\,\beta=x_4$とすれば

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2=1$$

となり、(x_1,x_2,x_3,x_4)は4次元空間内の3次元球面S^3をつくる。つまり$SU(2)\cong S^3$である

これは2次元平面内の単位円(1次元球面)S^1がU(1)と同相なことに対応する$(U(1)\cong S^1)$

SU(2)とSO(3)

$j=\frac{1}{2}$のスピン表現はSO(3)の表現であったから

SO(3) → SU(2)の対応が具体的に与えられているが、逆に$u=e^{-i\frac{\theta}{2}\mathbf{n}\cdot\sigma}\in SU(2)$に対して$\sigma'\equiv u\sigma u^{\dagger}$

とすれば

$$(\sigma'_\alpha)^\dagger = \sigma_\alpha$$
$$(\sigma'_\alpha)^2 = E_2$$
$$\sigma'_\alpha \sigma'_\beta = i\epsilon_{\alpha\beta\gamma}\sigma'_\gamma$$

また,

$$\mathrm{Tr}\,\sigma' = \mathrm{Tr}\,\mathcal{U}\sigma\mathcal{U}^\dagger = \mathrm{Tr}\,\mathcal{U}^\dagger\mathcal{U}\sigma = \mathrm{Tr}\,\sigma = 0$$

よって,パウリ行列の実係数の線形和として次のように展開できる

$$\sigma'_\alpha = Q_{\alpha\beta}\sigma_\beta \quad , \quad Q_{\alpha\beta} \in \mathbb{R}$$

更に

$$\begin{aligned}\{\sigma'_\alpha, \sigma'_\beta\} &= Q_{\alpha\alpha'}Q_{\beta\beta'}\{\sigma_{\alpha'}, \sigma_{\beta'}\} \\ &= Q_{\alpha\alpha'}Q_{\beta\beta'}\,2\delta_{\alpha'\beta'} \\ &= 2Q_{\alpha\gamma}Q_{\beta\gamma} \\ &= 2\delta_{\alpha\beta}\end{aligned}$$

$$Q\hat{Q} = E_3$$

$$\sigma'_1\sigma'_2\sigma'_3 = \mathcal{U}\sigma_1\sigma_2\sigma_3\mathcal{U}^\dagger = \mathcal{U}i\mathcal{U}^\dagger = iE_2$$

また,

$$\begin{aligned}\sigma'_1\sigma'_2\sigma'_3 &= Q_{1\alpha}Q_{2\beta}Q_{3\gamma}\sigma_\alpha\sigma_\beta\sigma_\gamma \\ &= \sum_\gamma\Big[\sum_{\alpha=\beta}(Q_{1\alpha}Q_{2\alpha})\sigma_{3\gamma}\sigma_\gamma \\ &\qquad + \sum_{\alpha\neq\beta}Q_{1\alpha}Q_{2\beta}Q_{3\gamma}\sigma_\alpha\sigma_\beta\sigma_\gamma\Big] \\ &= \sum_{(\alpha,\beta,\gamma)=P(123)}Q_{1\alpha}Q_{2\beta}Q_{3\gamma}\sigma_\alpha\sigma_\beta\sigma_\gamma \\ &= \sum_{(\alpha,\beta,\gamma)=P(123)}Q_{1\alpha}Q_{2\beta}Q_{3\gamma}\,iE_2\epsilon_{\alpha\beta\gamma} \\ &= iE_2\det Q\end{aligned}$$

よって

$$\det Q = 1$$

$$\mathcal{U} \in SU(2) \underset{2対1}{\rightarrow} Q \in SO(3)$$