7/14 第19回 201810869 永井るい

j = 1/2の回転行列

$$R(\alpha,\beta,\gamma)|jm\rangle = |jm'\rangle[D^j(R(\alpha,\beta,\gamma))]_{m'm}$$

$$\begin{aligned}\langle jm'|R|jm\rangle &= \langle jm'|e^{-iJ_z\alpha}e^{-iJ_y\beta}e^{-iJ_z\gamma}|jm\rangle \\ &= e^{-im'\alpha}\langle jm'|e^{-iJ_y\beta}|jm\rangle e^{-im\gamma} \\ &= [D^j(R(\alpha,\beta,\gamma))]_{m'm}\end{aligned}$$

$$[D^j(R(\alpha,\beta,\gamma))]_{m'm} = e^{-im'\alpha} d^j_{m'm} e^{-im\gamma}$$

$$d^j_{m'm} = \langle jm'|e^{-iJ_y\beta}|jm\rangle$$

$$\begin{aligned}d^j_{m'm} &= \langle jm'|e^{-iJ_y\beta}|jm\rangle \\ &= \frac{1}{[(j+m)(j-m)]^{1/2}}\sum_{k\ell}(-)^{k-m+m'}\begin{pmatrix} j+m \\ k\end{pmatrix}\begin{pmatrix} j-m \\ j-k-m'\end{pmatrix}\sqrt{(j+m')!(j-m)!} \\ &\quad \times \cos^{2j-2k+m-m'}\frac{\beta}{2}\sin^{2k-m+m'}\frac{\beta}{2} \\ &= \sum_k(-)^{k-m+m'}\frac{\sqrt{(j+m)!(j-m)!(j+m')!(j-m')!}}{(j+m-k)!k!(k-m+m')!(j-k-m')!} \\ &\quad \times \cos^{2j-2k+m-m'}\frac{\beta}{2}\sin^{2k-m+m'}\frac{\beta}{2}\end{aligned}$$

( )! の ( ) 内が0以上

$j=\frac{1}{2}$ のときは

$m'=m=\frac{1}{2}$

$$\begin{aligned}d^{1/2}_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}} &= \sum_{k=0}^{0}(-)^k\frac{\sqrt{(\frac12+\frac12)!(\frac12-\frac12)!(\frac12+\frac12)!(\frac12-\frac12)!}}{(\frac12+\frac12-k)!k!(k-\frac12+\frac12)!(\frac12-k-\frac12)!}\cos^{1-2k+\frac12-\frac12}\frac{\beta}{2}\sin^{2k-\frac12+\frac12}\frac{\beta}{2} \\ &= \cos\frac{\beta}{2}\end{aligned}$$

$m'=\frac{1}{2},\ m=-\frac{1}{2}$

$$\begin{aligned}d^{1/2}_{\frac{1}{2},-\frac{1}{2}} &= \sum_{k=0}^{0}(-)^{k+1}\frac{\sqrt{(\frac12-\frac12)!(\frac12+\frac12)!(\frac12+\frac12)!(\frac12-\frac12)!}}{(\frac12-\frac12-k)!k!(k+\frac12+\frac12)!(\frac12-k-\frac12)!}\cos^{1-2k-\frac12-\frac12}\frac{\beta}{2}\sin^{2k+\frac12+\frac12}\frac{\beta}{2} \\ &= -\sin\frac{\beta}{2}\end{aligned}$$

$m'=-\frac{1}{2},\ m=\frac{1}{2}$

$$\begin{aligned}d^{1/2}_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}} &= \sum_{k=1}^{1}(-)^{k-1}\frac{\sqrt{(\frac12+\frac12)!(\frac12-\frac12)!(\frac12-\frac12)!(\frac12+\frac12)!}}{(\frac12+\frac12-k)!k!(k-\frac12-\frac12)!(\frac12-k+\frac12)!}\cos^{1-2k+\frac12+\frac12}\frac{\beta}{2}\sin^{2k-\frac12-\frac12}\frac{\beta}{2} \\ &= \sin\frac{\beta}{2}\end{aligned}$$

$m'=m=-\frac{1}{2}$

$$\begin{aligned}d^{1/2}_{-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}} &= \sum_{k=0}^{0}(-)^k\frac{\sqrt{(\frac12-\frac12)!(\frac12+\frac12)!(\frac12-\frac12)!(\frac12+\frac12)!}}{(\frac12-\frac12-k)!k!(k+\frac12-\frac12)!(\frac12-k+\frac12)!}\cos^{1-2k-\frac12+\frac12}\frac{\beta}{2}\sin^{2k+\frac12-\frac12}\frac{\beta}{2} \\ &= \cos\frac{\beta}{2}\end{aligned}$$

$$
d^{1/2} = \begin{array}{cc} m=\frac{1}{2} & m=-\frac{1}{2} \\ \end{array}
$$
$$
\begin{array}{c} \\ \end{array}
\begin{pmatrix} \cos\frac{\beta}{2} & -\sin\frac{\beta}{2} \\ \sin\frac{\beta}{2} & \cos\frac{\beta}{2} \end{pmatrix}
\begin{array}{l} m'=\frac{1}{2} \\ m'=-\frac{1}{2} \end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
D^{1/2} &= \begin{pmatrix} e^{-i\frac{1}{2}\alpha} & 0 \\ 0 & e^{i\frac{1}{2}\alpha} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\frac{\beta}{2} & -\sin\frac{\beta}{2} \\ \sin\frac{\beta}{2} & \cos\frac{\beta}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{-i\frac{1}{2}\gamma} & 0 \\ 0 & e^{i\frac{1}{2}\gamma} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} e^{-i\frac{1}{2}(\alpha+\gamma)}\cos\frac{\beta}{2} & -e^{-i\frac{1}{2}(\alpha-\gamma)}\sin\frac{\beta}{2} \\ e^{i\frac{1}{2}(\alpha-\gamma)}\sin\frac{\beta}{2} & e^{i\frac{1}{2}(\alpha+\gamma)}\cos\frac{\beta}{2} \end{pmatrix} \\
&= \boxed{e^{-i\frac{\gamma}{2}\sigma_z}\, e^{-i\frac{\beta}{2}\sigma_y}\, e^{-i\frac{\alpha}{2}\sigma_z}}
\end{aligned}
$$

ユニタリ表現であるから

$$
\begin{aligned}
\left[D^{1/2}\right]^{-1} &= \left[D^{1/2}\right]^{\dagger} \\
\det D^{1/2} &= 1
\end{aligned}
\qquad\qquad D^{1/2} \in SU(2)
$$

$$
\parallel
$$
$$
\cos^2\frac{\beta}{2} - \left(-\sin^2\frac{\beta}{2}\right)
$$

$\mathbb{n}\,(|\mathbb{n}|=1)$軸周りの$\theta$回転

$$
e^{-i\frac{\theta}{2}\hat{n}\cdot\sigma} = E_2\cos\frac{\theta}{2} - i\mathbb{n}\cdot\sigma\sin\frac{\theta}{2} \in SU(2)
$$

同じ回転を2種類に表す

$$
SO(3) \rightleftarrows SU(2)
$$

の対応は1対2である。これを$j=1/2$の時の表現は2価であるといいこの表現を<u>2価表現</u>という。

最後の変形を導く。一般に$|\mathbb{n}|=1$なるベクトル$\mathbb{n}$に対して

$$
\begin{aligned}
\mathbb{n}\cdot\sigma &= P_+ - P_- & &\cdots\cdots & (\mathbb{n}\cdot\sigma)^2 &= \mathbb{n}^2 E = E \\
P_\pm &= \frac{1}{2}(E_2 \pm \mathbb{n}\cdot\sigma) \\
P_\pm^2 &= P_\pm = P_\pm^\dagger & &\cdots\cdots & P_\pm^2 &= \frac{1}{4}(E\pm\mathbb{n}\cdot\sigma)^2 = \frac{1}{4}(E\pm 2\mathbb{n}\cdot\sigma + E) \\
P_+ + P_- &= E_2 & & & &= \frac{1}{2}(E\pm\mathbb{n}\cdot\sigma) = P_\pm \\
P_+P_- &= 0 & &\cdots\cdots & P_+P_- &= \frac{1}{4}(E+\mathbb{n}\cdot\sigma)(E-\mathbb{n}\cdot\sigma) = \frac{1}{4}(E-\overset{E}{(\mathbb{n}\cdot\sigma)^2}) \\
& & & & &= 0
\end{aligned}
$$

よって、関数$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$なる関数に関して

$$
\begin{aligned}
(\mathbb{n}\cdot\sigma)^2 &= (P_+ - P_-)^2 = P_+^2 - P_+P_- - P_-P_+ + (-1)^2P_-^2 \\
&= P_+ + (-1)^2 P_- \\
(\mathbb{n}\cdot\sigma)^n &= P_+ + (-1)^n P_- \\
f(a\mathbb{n}\cdot\sigma) &= f(a)P_+ + f(-a)P_-
\end{aligned}
$$

$f(x)=e^{-i\frac{\theta}{2}x}$とすれば

$$
\begin{aligned}
e^{-i\frac{\theta}{2}\mathbb{n}\cdot\sigma} &= e^{-i\frac{\theta}{2}}P_+ + e^{i\frac{\theta}{2}}P_- \\
&= e^{-i\frac{\theta}{2}}\frac{1}{2}(E_2+\mathbb{n}\cdot\sigma) + e^{i\frac{\theta}{2}}\frac{1}{2}(E_2+\mathbb{n}\cdot\sigma) \\
&= E_2\cos\frac{\theta}{2} - i\mathbb{n}\cdot\sigma\sin\frac{\theta}{2}
\end{aligned}
$$

$SU(2) \sim S^3$について

$$D^{1/2} = \begin{pmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-\frac{i}{2}(\alpha+\gamma)}\cos\frac{\beta}{2} & -e^{-i\frac{1}{2}(\alpha-\gamma)}\sin\frac{\beta}{2} \\ e^{i\frac{1}{2}(\alpha-\gamma)}\sin\frac{\beta}{2} & e^{i\frac{1}{2}(\alpha+\gamma)}\cos\frac{\beta}{2} \end{pmatrix}$$

$$\det D^{1/2} = 1 = |a|^2 + |b|^2$$

とも書ける(ケーリー・クラインパラメター)。なお

$$a = e^{-i\frac{1}{2}(\alpha+\gamma)}\cos\frac{\beta}{2}$$

$$b = -e^{-i\frac{1}{2}(\alpha-\gamma)}\sin\frac{\beta}{2}$$

また、4つの実数を $\mathrm{Re}\,\alpha = x_1$, $\mathrm{Im}\,\alpha = x_2$, $\mathrm{Re}\,\beta = x_3$, $\mathrm{Im}\,\beta = x_4$ とすれば

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1$$

となり、(x_1, x_2, x_3, x_4) は4次元空間内の3次元球面 S^3 をつくる。つまり $SU(2) \simeq S^3$ である。

これは2次元平面内の単位円(1次元球面) S^1

$$z = e^{i\theta} = x + iy$$

$$|z|^2 = 1 = x^2 + y^2$$

が $U(1)$ と同相なことに対応する $U(1) \cong S^1$。

$SU(2) \to SO(3)$ の対応

$j = 1/2$ のスピン表現 $SO(3)$ の表現であったから、$SO(3) \to SU(2)$ の対応が具体的にあたえられているが、逆に

$u = e^{-i\frac{\theta}{2}\hat{n}\cdot\sigma} \in SU(2)$ に対して $\sigma' \equiv u\sigma u^\dagger$ とすれば

$$(\sigma_\alpha')^\dagger = \sigma_\alpha \qquad (\sigma_\alpha')^2 = E_2$$

$\alpha \neq \beta$ の時、$\sigma_\alpha'\sigma_\beta' = i\epsilon_{\alpha\beta\gamma}\sigma_\gamma'$

また、$\mathrm{Tr}\,\sigma' = \mathrm{Tr}\,u\sigma u^\dagger = \mathrm{Tr}\,u^\dagger u\sigma = \mathrm{Tr}\,\sigma = 0$

よってパウリ行列の実係数の線形和としてで次のように展開できる。

$$\sigma_\alpha' = Q_{\alpha\beta}\sigma_\beta \qquad Q_{\alpha\beta} \in \mathbb{R}$$

更に $\underset{\displaystyle 2\delta_{\alpha\beta}}{\{\sigma_\alpha', \sigma_\beta'\}} = Q_{\alpha\alpha'}Q_{\beta\beta'}\{\sigma_{\alpha'}, \sigma_{\beta'}\}$

$$= Q_{\alpha\alpha'}Q_{\beta\beta'}2\delta_{\alpha'\beta'}$$

$$= 2Q_{\alpha\gamma}Q_{\beta\gamma} = 2\delta_{\alpha\beta} \to Q\tilde{Q} = E_3$$

更に $\sigma_1'\sigma_2'\sigma_3' = u\sigma_1\sigma_2\sigma_3u^\dagger = uiu^\dagger = iE_2$

また、$\sigma_1'\sigma_2'\sigma_3' = Q_{1\alpha}Q_{2\beta}Q_{3\gamma}\sigma_\alpha\sigma_\beta\sigma_\gamma$

$$= \sum_\gamma \left[\sum_{\alpha(=\beta)} (Q_{1\alpha}Q_{2\alpha}) Q_{3\gamma}\sigma_\gamma + \sum_{\alpha\neq\beta} Q_{1\alpha}Q_{2\beta}Q_{3\gamma}\sigma_\beta\sigma_\gamma \right]$$

$$= \sum_{(\alpha,\beta,\gamma)=P(123)} Q_{1\alpha}Q_{2\beta}Q_{3\gamma}\sigma_\alpha\sigma_\beta\sigma_\gamma$$

$$= \sum_{(\alpha,\beta,\gamma)=P(123)} Q_{1\alpha}Q_{2\beta}Q_{3\gamma}\, iE_2\,\epsilon_{\alpha\beta\gamma}$$

$$= iE_2 \det Q$$

よって

$$\det Q = 1$$

$$SU(2) \ni U \to Q \in SO(3)$$