No 第18回

Date 7.10

# 回転群の表現

201810877 林美吹

$R(\alpha,\beta,\gamma)=e^{-iJ_z\alpha}e^{-iJ_y\beta}e^{-iJ_z\gamma}$

$\psi=(|-j\rangle,|-j+1\rangle,\cdots,|j\rangle)$
$(j=0,1,2,\cdots,\frac{1}{2},\frac{3}{2},\cdots)$

一般に回転操作 $R=e^{-i\theta n\cdot J}$ に対して、$R\psi=\psi D(R)$ となるが、特に無限小変換 $R=1-i\theta n\cdot J$ に対してその変換行列つまり回転群の表現は基底と $J$ の行列要素を与えることで定まる。

$$J_z|\psi_m\rangle=m|\psi_m\rangle$$
$$J_\pm|\psi_m\rangle=\sqrt{(j\mp m)(j\pm m+1)}\,|\psi_{m\pm1}\rangle$$
$$\langle\psi_{m'}|J_z|\psi_m\rangle=\delta_{m'm}\,m$$
$$\langle\psi_{m'}|J_\pm|\psi_m\rangle=\delta_{m',m\pm1}\sqrt{(j\mp m)(j\pm m+1)}\qquad(但し\hbar=1)$$

となる基底 $|\psi_m\rangle$, $m=-j,\cdots,m$ をとれば これは完全であり、回転群の基底となる。この基底がつくる表現を回転群の スピンj表現 という。この表現の次元は $2j+1$ である。

$R_1\psi=\psi D^j(R_1)$, $R_2\psi=\psi D^j(R_2)$ とすると、
$R_2R_1\psi=\psi D^j(R_2R_1)$, $D^j(R_2R_1)=D^j(R_2)D^j(R_1)$

このとき、一般角の回転角の回転群の元をオイラー角より
$R(\alpha,\beta,\gamma)=e^{-iJ_z\alpha}e^{-iJ_y\beta}e^{-iJ_z\gamma}$ と書けば、

和をとる

$$R(\alpha,\beta,\gamma)|jm\rangle=|jm'\rangle[D^j(R(\alpha,\beta,\gamma))]_{m'm}$$

これに左から $\langle jm'|$ をかけると、

$J_z|jm\rangle=m|jm\rangle$ より

$$\langle jm'|R(\alpha,\beta,\gamma)|jm\rangle=\langle jm'|e^{-iJ_z\alpha}e^{-iJ_y\beta}e^{-iJ_z\gamma}|jm\rangle$$
$$=e^{-im'\alpha}\langle jm'|e^{-iJ_y\beta}|jm\rangle e^{-im\gamma}$$
$$=[D^j(R(\alpha,\beta,\gamma))]_{m'm}$$

非自明なのは $J_y$ の寄与なので、
$$[D^j(R(\alpha,\beta,\gamma))]_{m'm}=e^{-im'\alpha}d^j_{m'm}e^{-im\gamma}$$
$$d^j_{m'm}=\langle jm'|e^{-iJ_y\beta}|jm\rangle$$

これが非自明

No.
Date

Schwinger bosonによる方法にて求めた結果…

$$d^j_{m'm} = \langle jm' | e^{-iJ_y\beta} | jm \rangle$$

$$= \frac{1}{[(j+m)(j-m)]^{\frac{1}{2}}} \sum_{k} (-)^{k-m+m'} \binom{j+m}{k} \binom{j-m}{j-k-m'} \sqrt{(j+m')!(j-m')!}$$

$$\times \cos^{2j-2k+m-m'}\frac{\beta}{2} \sin^{2k-m+m'}\frac{\beta}{2}$$

$$= \sum_k (-)^{k-m+m'} \frac{\sqrt{(j+m)!(j-m)!(j+m')!(j-m')!}}{(j+m-k)!k!(k-m+m')!(j-k-m')!}$$

$$\times \cos^{2j-2k+m-m'}\frac{\beta}{2} \sin^{2k-m+m'}\frac{\beta}{2}$$

$$\left.\begin{array}{l} j=\frac{1}{2} \\ j=0,1,2,\cdots \end{array}\right\} 2通り$$

クレブシュ・ゴルダン係数と回転群

スピンj表現の基底$\psi^j$として、

$$\psi^j = (|j,-j\rangle, |j,-j+1\rangle, \cdots, |j,j\rangle)$$

$$R\psi^j = \psi^j D^j(R)$$ となる。

ここでスピン$j_1$表現とスピン$j_2$表現の基底関数を$|j_1 m_1\rangle$, $|j_2 m_2\rangle$とすれば $R|j_1 m_1\rangle_1 = |j_1 m_1'\rangle_1 D^{j_1}_{m_1'm_1}$, $R|j_2 m_2\rangle_2 = |j_2 m_2'\rangle_2 D^{j_2}_{m_2'm_2}(R)$

これから次のテンソル積の基底に対して、

$$|j_1 m_1 j_2 m_2\rangle = |j_1 m_1\rangle_1 |j_2 m_2\rangle_2 = |j_1 m_1\rangle_1 \otimes |j_2 m_2\rangle_2$$

複合添字$m_1, m_2$を使って回転Rに対応して新しい表現行列を次のように定める。

$$R|j_1 m_1 j_2 m_2\rangle = |j_1 m_1', j_2 m_2'\rangle D_{m_1'm_2':m_1,m_2}(R),\quad D_{m_1'm_2':m_1,m_2}(R) \equiv D^{j_1}_{m_1'm_1}(R) D^{j_2}_{m_2'm_2}(R)$$

No.

Date

これが表現となることは次のように確認できる。

$$R_2R_1|j_1m_1j_2m_2\rangle = |j_1m_1''\rangle_1 D^{j_1}_{m_1''m_1'}(R_2)D^{j_1}_{m_1'm_1}(R_1)\otimes|j_2m_2''\rangle_2 D^{j_2}_{m_2''m_2'}(R_2)D^{j_2}_{m_2'm_2}(R_1)$$

$$= |j_1m_1'\rangle_1 D^{j_1}_{m_1'm_1}(R_2R_1)\otimes|j_2m_2'\rangle_2 D^{j_2}_{m_2'm_2}(R_2R_1)$$

$$= |j_1m_1j_2m_2\rangle D_{m_1'm_2';m_1,m_2}(R_2R_1)$$

この表現$D(R)$は$(2j_1+1)(2j_2+1)$次元の表現で、積表現とよばれる。

CG係数 $|j_1m_1j_2m_2\rangle = |jm\rangle\langle jm|j_1m_1j_2m_2\rangle$

ここで$|jm\rangle$がスピンj表現に従うことに注意すれば、CG係数をつかって$|j_1m_1,j_2m_2\rangle$の変換は次のようにもかける。

$$R|j_1m_1j_2m_2\rangle = R|jm\rangle\langle jm|j_1m_1j_2m_2\rangle$$

よってRを西谷して、$|j_1m_1'j_2m_2'\rangle D^{j_1}_{m_1'm_1}D^{j_2}_{m_2'm_2} = |jm\rangle D^{j}_{m'm}\langle jm|j_1m_1j_2m_2\rangle$

これに$\langle j_1m_1'j_2m_2'|$を左からかけて、

$$D^{j_1}_{m_1'm_1}D^{j_2}_{m_2'm_2} = \langle j_1m_1'j_2m_2'|jm'\rangle D^{j}_{m'm}\langle jm|j_1m_1j_2m_2\rangle$$

CG係数はその構成法から実であるので、

$\langle j_1m_1j_2m_2|jm\rangle = \underbrace{\langle jm|j_1m_1j_2m_2\rangle}_{\langle jm|j_1m_1j_2m_2\rangle^\dagger}$ であり、以下のようにもかける。

$$D^{j_1}_{m_1'm_1}D^{j_2}_{m_2'm_2} = D^{j}_{m'm}\langle jm'|j_1m_1'j_2m_2'\rangle\langle jm|j_1m_1j_2m_2\rangle$$

$$D^{j_1}_{m_1'm_1}D^{j_2}_{m_2'm_2} = \langle j_1m_1'j_2m_2'|jm'\rangle\langle j_1m_1j_2m_2|jm\rangle D^{j}_{m'm}$$