量子力学3 第18回

201810880 不破悠

回転群の表現

$$\boxed{R(\alpha,\beta,\gamma)=e^{-iJ_z\alpha}e^{-iJ_y\beta}e^{-iJ_z\gamma}}$$

一般に回転操作 $R=e^{-i\theta n\cdot J}$ に対して

$$R\psi=\psi D(R)$$

$\psi=(|-j\rangle,|-j+1\rangle,\dots,|j\rangle)$ 、$|m\rangle=|\psi_m\rangle$

$j:0,1,2,\cdots\ 1/2,3/2,\cdots$

となるが，特に無限小変換 $R=1-i\theta n\cdot J$ に対してその変換行列つまり回転群の表現は基底と J の行列要素を与えることで定まる。関して，今までの議論に従って

$\hbar=1$

$$J_z|\psi_m\rangle=m|\psi_m\rangle$$
$$J_\pm|\psi_m\rangle=\sqrt{(j\mp m)(j\pm m+1)}\,|\psi_{m\pm1}\rangle$$
$$\langle\psi_{m'}|J_z|\psi_m\rangle=\delta_{m'm}\,m$$
$$\langle\psi_{m'}|J_\pm|\psi_m\rangle=\delta_{m',m\pm1}\sqrt{(j\mp m)(j\mp m+1)}$$

となる基底 $|\psi_m\rangle$, $m=-j,\dots,m$ をとれば，これは完全であり，回転群の基底となる。

$D^j(R)$

この基底がつくる表現を回転群のスピン j 表現という。この表現の次元は $2j+1$ である。

$$R_1\psi=\psi D^j(R_1),\ R_2\psi=\psi D^j(R_2)$$
$$\longrightarrow R_2R_1\psi=\psi D^j(R_2R_1)\qquad D^j(R_2R_1)=D^j(R_2)D^j(R_1)$$

この時，一般の回転角の回転群の元をオイラー角により $R(\alpha,\beta,\gamma)=e^{-iJ_z\alpha}e^{-iJ_y\beta}e^{-iJ_z\gamma}$ と書けば

$\langle jm'|$ →

$$R(\alpha,\beta,\gamma)|jm\rangle=|jm'\rangle[D^j(R(\alpha,\beta,\gamma))]_{m'm}$$
$$=\langle jm'|e^{-iJ_z\alpha}e^{-iJ_y\beta}e^{-iJ_z\gamma}|jm\rangle$$
$$=e^{-im'\alpha}\langle jm'|e^{-iJ_y\beta}|jm\rangle e^{-im\gamma}$$
$$=[D^j(R(\alpha,\beta,\gamma))]_{m'm}$$

→ $J_z|jm\rangle=m|jm\rangle$ 対角的

非自明なのは J_y からの寄与だから

$$[D^j(R(\alpha,\beta,\gamma))]_{m'm}=e^{-im'\alpha}d^j_{m'm}e^{-im\gamma}$$
$$d^j_{m'm}=\langle jm'|e^{-iJ_y\beta}|jm\rangle$$

これが非自明

以下の節で，この $d^j_{m'm}$ を決定する。

（Schwinger boson による方法の解説は補足資料）

$$d^j_{m'm} = \langle jm' | e^{-iJ_y\beta} | jm \rangle$$

$$= \frac{1}{[(j'+m)(j'-m)]^{1/2}} \sum_{\substack{k \\ \text{すべて}}} (-)^{k-m+m'} \binom{j+m}{k} \binom{j-m}{j'-k-m'} \sqrt{(j'+m')(j-m')!}$$

$$\times \cos^{2j-2k+m-m'}\frac{\beta}{2}\sin^{2k-m+m'}\frac{\beta}{2}$$

$$\binom{n}{m} = {}_nC_m = \begin{cases} \dfrac{n!}{(n-m)!m!} & 0 \leq m \leq n \\ 0 & \text{それ以外} \end{cases}$$

$$= \sum_k (-)^{k-m+m'} \frac{\sqrt{(j'+m)!(j-m)!(j'+m')!(j'-m')!}}{(j+m-k)!k!(k-m+m')!(j'-k-m')!} \times \cos^{2j-2k+m-m'}\frac{\beta}{2}\sin^{2k-m+m'}\frac{\beta}{2}$$

$$\left.\begin{array}{l} j = 1/2 \\ j = 0, 1, 2, \cdots \end{array}\right\} \text{2通り}$$

クレブシュ・ゴルダン係数と回転群の積表現

スピン j 表現の基底 ψ^j として

$$\psi^j = (|j,-j\rangle, |j,-j+1\rangle, \cdots, |j,j\rangle)$$

$$R\psi^j = \psi^j D^j(R) \quad \leftarrow \quad D^j$$

$|jm\rangle$

$\underbrace{m = -j, \cdots, j}_{2j+1\text{コ}}$

となる。ここでスピン j_1 表現とスピン j_2 表現の基底関数を $|j_1m_1\rangle_1$, $|j_2m_2\rangle_2$ とすれば

$$R|j_1m_1\rangle_1 = |j_1m_1'\rangle_1 D^{j_1}_{m_1'm_1}(R), \quad R|j_2m_2\rangle_2 = |j_2m_2'\rangle_2 D^{j_2}_{m_2'm_2}(R)$$

これから次のテンソル積の基底に対して

$$|j_1m_1j_2m_2\rangle = |j_1m_1\rangle_1|j_2m_2\rangle_2 = |j_1m_1\rangle_1 \otimes |j_2m_2\rangle_2$$

複号添字 m_1, m_2 をつかって回転 R に対応して新しい表現行列を次のように定める。

$$R|j_1m_1j_2m_2\rangle = |j_1m_1', j_2m_2'\rangle D_{m_1',m_2';m_1,m_2}(R)$$

$$D_{m_1',m_2';m_1m_2}(R) \equiv D^{j_1}_{m_1'm_1}(R)D^{j_2}_{m_2'm_2}(R)$$

これが表現となることは次のように確認できる　　行列の積

$$R_2R_1|j_1m_1j_2m_2\rangle = |j_1m_1''\rangle_1 D^{j_1}_{m_1''m_1'}(R_2)D^{j_1}_{m_1'm_1}(R_1) \otimes |j_2m_2''\rangle_2 D^{j_2}_{m_2''m_2'}(R_2)D^{j_2}_{m_2'm_2}(R_1)$$

$$= |j_1m_1'\rangle_1 D^{j_1}_{m_1'm_1}(R_2R_1) \otimes |j_2m_2'\rangle_2 D^{j_2}_{m_2'm_2}(R_2R_1)$$

$$= |j_1m_1j_2m_2\rangle D_{m_1',m_2';m_1,m_2}(R_2R_1)$$

この表現 $D(R)$ は $(2j_1+1)(2j_2+1)$ 次元の表現で積表現と呼ばれる。

積表現　$R|j_1m_1j_2m_2\rangle = |j_1m_1'j_2m_2'\rangle D^{j_1}_{m_1'm_1}(R)D^{j_2}_{m_2'm_2}(R)$

CG　$|j_1m_1j_2m_2\rangle = |jm\rangle\langle jm|j_1m_1j_2m_2\rangle$

ここで$|jm\rangle$がスピンj表現に従うことに注意すればクレブシュ・ゴルダン係数をつかって$|j_1m_1, j_2m_2\rangle$の変換は次のようにも書ける。

$$R|j_1m_1 j_2m_2\rangle = R|jm\rangle\langle jm|j_1m_1 j_2m_2\rangle$$

$$= |jm'\rangle D^j_{m'm}(R)\langle jm|j_1m_1 j_2m_2\rangle$$

jでも和

よってRを略して

$$|j_1m_1' j_2m_2'\rangle D^{j_1}_{m_1'm_1} D^{j_2}_{m_2'm_2} = |jm'\rangle D^j_{m'm}\langle jm|j_1m_1 j_2m_2\rangle$$

これに$\langle j_1m_1' j_2m_2'|$を左からかけて　　直交 $\langle j_1m_1 j_2m_2|j_1m_1' j_2m_2'\rangle = \delta_{m_1m_1'}\delta_{m_2m_2'}$

$$D^{j_1}_{m_1'm_1} D^{j_2}_{m_2'm_2} = \langle j_1m_1' j_2m_2'|jm'\rangle D^j_{m'm}\langle jm|j_1m_1 j_2m_2\rangle$$

クレブシュ・ゴルダン係数はその構成法から実だから$\langle j_1m_1 j_2m_2|jm\rangle = \langle jm|j_1m_1 j_2m_2\rangle^* = \langle jm|j_1m_1 j_2m_2\rangle$ 実
であり、以下のようにも書ける。

$$\begin{cases} D^{j_1}_{m_1'm_1} D^{j_2}_{m_2'm_2} = D^j_{m'm}\langle jm'|j_1m_1' j_2m_2'\rangle\langle jm|j_1m_1 j_2m_2\rangle \\ D^{j_1}_{m_1'm_1} D^{j_2}_{m_2'm_2} = \langle j_1m_1' j_2m_2'|jm'\rangle\langle j_1m_1 j_2m_2|jm\rangle D^j_{m'm} \end{cases}$$