201810834 No.
量子力学3 第18回 相原大地 Date

回転群の表現 $R(\alpha,\beta,\gamma)=e^{-iJ_z\alpha}e^{-iJ_y\beta}e^{-iJ_z\gamma}$

一般に回転操作 $R=e^{-i\theta\vec{n}\cdot\vec{J}}$ に対して、 $|m\rangle=|\psi_m\rangle$

$R\psi=\psi D(R)$ $\psi=(|-j\rangle,|-j+1\rangle,\cdots,|j\rangle)$ $j:0,1,2,\cdots,1/2,3/2,\cdots$

となるが、特に無限小変換 $R=1-i\theta\vec{n}\cdot\vec{J}$ に対してその変換行列

つまり回転群の表現は基底と $\vec{J}$ の行列要素を与えることで定まる。

$J_z|\psi_m\rangle=m|\psi_m\rangle$ $\hbar=1$

$J_\pm|\psi_m\rangle=\sqrt{(j\mp m)(j\pm m+1)}\,|\psi_{m\pm1}\rangle$

$\langle\psi_{m'}|J_z|\psi_m\rangle=\delta_{m'm}m$

$\langle\psi_{m'}|J_\pm|\psi_m\rangle=\delta_{m'm\pm1}\sqrt{(j\mp m)(j\pm m+1)}$

となる基底 $|\psi_m\rangle$, $m=-j,\cdots,j$ をとればこれは完全であり回転群の基底となる。この基底がつくる表現を回転群の spin j 表現という。

この表現の次元は $2j+1$ である。

$R_1\psi=\psi D^j(R_1)$, $R_2\psi=\psi D^j(R_2)$ $\to R_2R_1\psi=\psi D^j(R_2R_1)$ $\Big\}\ D^j(R_2R_1)=D^j(R_2)D^j(R_1)$

このとき、一般の回転角の回転群の元をオイラー角により

$R(\alpha,\beta,\gamma)=e^{-iJ_z\alpha}e^{-iJ_y\beta}e^{-iJ_z\gamma}$ とかけば、

$$R(\alpha,\beta,\gamma)|jm\rangle=|jm'\rangle\underbrace{[D^j(R(\alpha,\beta,\gamma))]_{m'm}}$$

$\langle jm'|$

$$\to \langle jm'|R|jm\rangle=\langle jm'|e^{-iJ_z\alpha}e^{-iJ_y\beta}e^{-iJ_z\gamma}|jm\rangle$$

$$=e^{-im'\alpha}\langle jm'|e^{-iJ_z\beta}|jm\rangle e^{-im\gamma}$$

$J_z|jm\rangle=m|jm\rangle$

$$=[D^j(R(\alpha,\beta,\gamma))]_{m'm}$$

非自明なのは J_y からの寄与だから、

$$[D^j(R(\alpha,\beta,\gamma))]_{m'm}=e^{-im'\alpha}d^j_{m'm}e^{-im\gamma}$$

$$d^j_{m'm}=\langle jm'|e^{-iJ_y\beta}|jm\rangle$$

これが非自明

$$d^j_{m'm}=\frac{1}{[(j+m)(j-m)]^{1/2}}\sum_k(-1)^{k-m+m'}\binom{j+m}{k}\binom{j-m}{j-k-m'}\sqrt{(j+m')!(j-m')!}$$

$$\times\cos^{2j-2k+m-m'}\frac{\beta}{2}\sin^{2k-m+m'}\frac{\beta}{2},\quad \binom{n}{m}={}_nC_m=\begin{cases}\frac{n!}{(n-m)!\,m!} & 0\le m\le n\\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}$$

$$=\sum_k(-1)^{k-m+m'}\frac{\sqrt{(j+m)!(j-m)!(j+m')!(j-m')!}}{(j+m-k)!\,k!\,(k-m+m')!\,(j-k-m')!}$$

$$\times\cos^{2j-2k+m-m'}\frac{\beta}{2}\sin^{2k-m+m'}\frac{\beta}{2}$$

クレブシュ・ゴルダン係数と回転群の積表現

spin j 表現の基底 ψ^j として

$$\psi^j = (|j,-j\rangle, |j,-j+1\rangle, \cdots, |j,j\rangle) \quad |j\ m\rangle \quad m = \underbrace{-j,\cdots,j}_{2j+1}$$

$$R\psi^j = \psi^j D^j(R)$$

となる。ここで spin j_1 表現と spin j_2 表現の基底関数を $|j_1 m_1\rangle_1$, $|j_2 m_2\rangle_2$ とすれば,

$$R|j_1 m_1\rangle_1 = |j_1 m_1'\rangle_1 D^{j_1}_{m_1' m_1}(R) \qquad R|j_2 m_2\rangle_2 = |j_2 m_2'\rangle_2 D^{j_2}_{m_2' m_2}(R)$$

これから次のテンソル積の基底に対して

$$|j_1 m_1 j_2 m_2\rangle = |j_1 m_1\rangle_1 |j_2 m_2\rangle_2 = |j_1 m_1\rangle_1 \otimes |j_2 m_2\rangle_2$$

複合添字 m_1, m_2 を使って回転 R に対して新しい表現行列を次のように定める

$$R|j_1 m_1 j_2 m_2\rangle = |j_1 m_1' j_2 m_2'\rangle D_{m_1' m_2' m_1 m_2}(R)$$

$$D_{m_1' m_2' m_1 m_2}(R) = D^{j_1}_{m_1' m_1}(R) D^{j_2}_{m_2' m_2}(R)$$

これが表現となることは次のように確認できる

$$R_2 R_1 |j_1 m_1 j_2 m_2\rangle = |j_1 m_1''\rangle_1 D^{j_1}_{m_1'' m_1'}(R_2) D^{j_1}_{m_1' m_1}(R_1)$$

$$\otimes |j_2 m_2''\rangle_2 D^{j_2}_{m_2'' m_2'}(R_2) D^{j_2}_{m_2' m_2}(R_1)$$

$$= |j_1 m_1'\rangle_1 D^{j_1}_{m_1' m_1}(R_2 R_1) \otimes |j_2 m_2'\rangle_2 D^{j_2}_{m_2' m_2}(R_2 R_1)$$

$$= |j_1 m_1 j_2 m_2\rangle D_{m_1' m_2' m_1 m_2}(R_2 R_1)$$

この表現 $D(R)$ は $(2j_1+1)(2j_2+1)$ 次元の表現で積表現と呼ばれる。

積表現 $R|j_1 m_1 j_2 m_2\rangle = |j_1 m_1' j_2 m_2'\rangle D^{j_1}_{m_1' m_1}(R) D^{j_2}_{m_2' m_2}(R)$

CG係数 $|j_1 m_1 j_2 m_2\rangle = |j\ m\rangle\langle j\ m | j_1\ m_1 j_2 m_2\rangle$

ここで $|j\ m\rangle$ が spin j 表現に従うことに注意すれば CG係数を使って $|j_1 m_1 j_2 m_2\rangle$ の変換は次のようにかける。

$$R|j_1 m_1 j_2 m_2\rangle = R|j\ m\rangle\langle j\ m | j_1 m_1 j_2 m_2\rangle$$

$$= |j\ m'\rangle D^j_{m' m}(R)\langle j\ m | j_1 m_1 j_2 m_2\rangle$$

よって R を略して

$$|j_1 m_1' j_2 m_2'\rangle D^{j_1}_{m_1' m_1} D^{j_2}_{m_2' m_2} = |j\ m'\rangle D^j_{m' m}\langle j\ m | j_1 m_1 j_2 m_2\rangle$$

これに左から $\langle j_1 m_1' j_2 m_2'|$ をかけると, $\langle j_1 m_1 j_2 m_2 | j_1 m_1' j_2 m_2'\rangle = \delta_{m_1 m_1'}\delta_{m_2 m_2'}$ より

$$D^{j_1}_{m_1' m_1} D^{j_2}_{m_2' m_2} = \langle j_1 m_1' j_2 m_2' | j\ m'\rangle D^j_{m' m}\langle j\ m | j_1 m_1 j_2 m_2\rangle$$

CG係数はその構成法から実だから,

$\langle j_1 m_1 j_2 m_2 | j\ m\rangle = \langle j\ m | j_1 m_1 j_2 m_2\rangle$ であり, 以下のようにかける。

Date

$$D^{j_1}_{m_1' m_1} D^{j_2}_{m_2' m_2} = D^{j}_{m' m} \langle j m' | j_1 m_1' j_2 m_2' \rangle \langle j m | j_1 m_1 j_2 m_2 \rangle .$$

$$D^{j_1}_{m_1' m_1} D^{j_2}_{m_2' m_2} = \langle j_1 m_1' j_2 m_2' | j m' \rangle \langle j_1 m_1 j_2 m_2 | j m \rangle D^{j}_{m' m} .$$