7/3 第7回 201810869 永井るい

回転操作の作る群　連続群としての回転群

以前の議論に従えば、回転とは次の座標変換として定義される。

$$\mathbb{r} \mapsto \mathbb{r}' = R\mathbb{r} \qquad \mathbb{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},\ \mathbb{r}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

ここで行列R(回転行列)は

$$R \in SO(3)$$
$$\tilde{R}R = E_3$$
$$\det R = 1$$

$$x^2+y^2+z^2 = \tilde{\mathbb{r}}\mathbb{r}$$
$$x'^2+y'^2+z'^2 = \tilde{\mathbb{r}}'\mathbb{r}' = \tilde{\mathbb{r}}\tilde{R}R\mathbb{r}$$
$$\Rightarrow \tilde{R}R = E_3$$

であり、

$$|\mathbb{r}'| = |\mathbb{r}|$$

つまり、回転とは長さを変えない変換である。

回転軸の存在

回転行列は次の関係式を満たす。

$$\det(R-E_3) = \det(\tilde{R}-E_3) = \det(R^{-1}-E_3) = \det R^{-1}\det(E_3-R) = -\det(R-E_3)$$

よって $\det(R-E_3)=0$ であり、以下のような v が存在する。

$$Rv = 1v = v$$

つまり v 上の点は回転で不変、つまり v は回転軸となる。よって、以後回転を回転軸 v と回転角 α で $R_\alpha(v)$ と表現する。

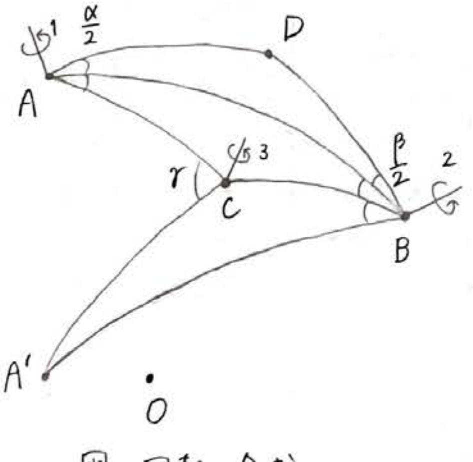

図 回転の合成

まず v_1 軸周りに α 回転、続いて v_2 軸周りに β 回転する $R = R_\beta(v_2)R_\alpha(v_1)$ とすれば

$$\tilde{R}R = \tilde{R}_\alpha\tilde{R}_\beta R_\beta R_\alpha = E_3$$
$$\det R = \det R_\beta \det R_\alpha = 1$$

Rも回転

回転軸と回転角は図の v_3 と γ

回転操作は群をつくる：$\boxed{\text{回転群}}$

オイラー角による回転の表示

準備

回転を回転軸$\hat{v}$と回転角$|v|$で$R(v)$と表せば回転軸は回転により不変だから$R(v)v = v$
よって、任意の回転Qに対して

$$QR(v)Q^{-1} \cdot Qv = Qv$$

より回転$R' = QRQ^{-1}$はベクトルQvを動かさない。つまり回転R'の軸はQvである。
またQRQ^{-1}は基底変換ともみることができるのでRと$R' = QRQ^{-1}$の回転角は等しい。
また、QはRの軸をR'の軸に移す回転ともいえる。このような

$$R' = QRQ^{-1}$$

のような関係にある対称操作RとR'は同じ class(類)に属すると呼ぶ。

$$R' = QRQ^{-1} \qquad Q: R\text{の回転軸} \to R'\text{の回転軸に移す回転}$$

オイラー角α, β, γによる回転の表示

一般の回転Rを次のような回転の合成として考える。

1. z軸周りの角度αの回転$R_\alpha(z)$。座標軸は$(x_1, y_1, z_1 = z)$へ。

2. 続いて新しいy_1軸周りの角度βの回転$R_\beta(y_1)$。座標軸は$(x_2, y_2 = y_1, z_2)$へ。
$$R_\beta(y_1) = R_\alpha(z)R_\beta(y)[R_\alpha(z)]^{-1}$$

3. 続いてさらに新しいz_2軸周りの角度γの回転$R_\gamma(z_2)$
$$R_\gamma(z_2) = R_\beta(y_1)R_\gamma(z_1)[R_\beta(y_1)]^{-1}$$

$$\begin{aligned}
R(\alpha, \beta, \gamma) &= R_\gamma(z_2)R_\beta(y_1)R_\alpha(z) \\
&= R_\gamma(z_2) \cdot R_\beta(y_1) \cdot R_\alpha(z) \\
&= [R_\beta(y_1)R_\gamma(z_1)[R_\beta(y_1)]^{-1}] \cdot R_\beta(y_1) \cdot R_\alpha(z) \\
&= R_\beta(y_1)R_\gamma(z_1) \cdot R_\alpha(z) \\
&= R_\alpha(z)R_\beta(y)[R_\alpha(z)]^{-1} \cdot R_\gamma(z) \cdot R_\alpha(z) \\
&= R_\alpha(z)R_\beta(y)R_\gamma(z)
\end{aligned}$$

回転操作のユニタリ演算子

前節までの議論に従って $\hat{n}$ 軸周りの角度 θ の回転 $R_\theta(\hat{n})$ に対応するユニタリ変換、角運動量演算子を用いて

$$R_\theta(\hat{n}) = e^{-i\hat{n}\cdot J}$$

と書ける。これからオイラー角による一般の回転（に対応するユニタリ変換）を次のように書く。

$$R(\alpha, \beta, \gamma) = e^{-iJ_z\alpha} e^{-iJ_y\beta} e^{-iJ_z\gamma}$$

これら回転操作は群を作り、それぞれが連続なパラメター n, θ および α, β, γ 等により決まる。このような群を連続群とよぶ。

$$[J_i, J_j] = i\hbar\epsilon_{ijk}J_k$$