量子力学3 ノート⑰

回転操作Rの作る群　(連続群としての回転群)

以前の議論に従えば、回転とは、

$$\mathbf{r} \longmapsto \mathbf{r}' = R\mathbf{r}$$

$$\begin{cases} R \in SO(3) \\ \tilde{R}R = E_3 \\ \det R = 1 \end{cases}$$

単位元に連続に変形できるものの集合

$$|\mathbf{r}'| = |\mathbf{r}|$$

$$\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2} = \sqrt{\tilde{\mathbf{r}}'\mathbf{r}'} = \sqrt{\tilde{\mathbf{r}}\underbrace{\tilde{R}R}_{1}\mathbf{r}}, \qquad \sqrt{x^2+y^2+z^2} = \sqrt{\tilde{\mathbf{r}}\mathbf{r}}$$

つまり長さを変えない変換

?

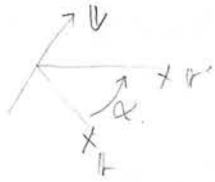
→回転軸の存在.　回転行列は次の関係式をみたす.

$$\det(R-E_3) = \det(\tilde{R}-E_3) = \det(R^{-1}-E_3) = \det R^{-1}\det(E_3-R) = -\det(R-E_3) \qquad (-)^3=-1$$

よって $\det(R-E_3)=0$ であり、以下のような $\mathbf{v}$ が存在する.

$$R\mathbf{v} = \mathbf{v}$$

つまり、$\mathbf{v}$上の点は回転で不変，つまり$\mathbf{v}$は回転軸となる. よって以後回転を回転軸$\mathbf{v}$と回転角αで$R_\alpha(\mathbf{v})$と表現しよう.



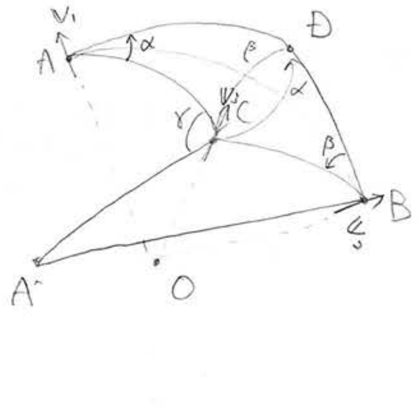
まず$\mathbf{v}_1$軸まわりにα回転，続いて$\mathbf{v}_2$軸まわりにβ回転する。$R=R_\beta(\mathbf{v}_2)\cdot R_\alpha(\mathbf{v}_1)$ とすれば、

$$\tilde{R}R = \tilde{R}_\alpha\tilde{R}_\beta R_\beta R_\alpha = E_3,$$
$$\det R = \det R_\beta \cdot \det R_\alpha = 1$$

→ Rも回転操作。軸と角は$\mathbf{v}_3, \gamma$

回転操作は群をつくる

⇒回転群.



Cはα→βで不変→軸上

オイラー角による回転の表示.

<準備>

回転を, 軸 $\mathbb{u}$ と角度 $|\mathbb{u}|$ で $R(\mathbb{u})$ と表せば, 回転軸は回転で不変だから.

$R(\mathbb{u})\cdot\mathbb{u} = \mathbb{u}$ 不変 。よって任意の回転 Q に対して

$$Q R(\mathbb{u}) Q^{-1} \circ Q\mathbb{u} = Q\mathbb{u}$$

より 回転 $R' = QRQ^{-1}$ はベクトル $Q\mathbb{u}$ を動かさない。→ 新しい回転 R' の軸は $Q\mathbb{u}$。

また, QRQ^{-1} は基底変換ともみることができるので. R と $R'(=QRQ^{-1})$ の回転角は等しい。また, Q は R の軸を R' の軸に移す回転とも言える。このような

$$R' = QRQ^{-1} \qquad Q: \text{軸を変える回転}$$

のような関係にある対称操作 R と R' は同じ class (類) に属すると呼ぶ。

オイラー角 α, β, γ による回転の表示

一般の回転 R を次のような回転の合成として考える.

1. z 軸まわりの角度 α の回転 $R_\alpha(z)$。座標軸は $(x_1, y_1, z_1 = z)$ へ.

2. 続いて, 新しい y_1 軸まわりの角度 β の回転 $R_\beta(y_1)$。座標軸は $(x_2, y_2 = y_1, z_2)$ へ.

$$R_\beta(y_1) = R_\alpha(z) R_\beta(y) [R_\alpha(z)]^{-1} \quad - *1$$

3. さらに, 新しい z_2 軸まわりの角度 γ の回転 $R_\gamma(z_2)$

$$R_\gamma(z_2) = R_\beta(y_1) R_\gamma(z) [R_\beta(y_1)]^{-1} \quad - *2$$

全ての回転

$$\begin{aligned}
\to R(\alpha,\beta,\gamma) &= R_\gamma(z_2) R_\beta(y_1) R_\alpha(z) \\
&= R_\gamma(z_2)\cdot R_\beta(y_1) \cdot R_\alpha(z) \\
&\overset{*2}{=} R_\beta(y_1)\cdot R_\gamma(z)\cdot \underbrace{[R_\beta(y_1)]^{-1}\cdot R_\beta(y_1)}_{=1}\cdot R_\alpha(z) \\
&= R_\beta(y_1)\cdot R_\gamma(z)\cdot R_\alpha(z) \\
&\overset{*1}{=} R_\alpha(z)\cdot R_\beta(y)\cdot \underbrace{[R_\alpha(z)]^{-1}\cdot R_\gamma(z)\cdot R_\alpha(z)} \\
&= R_\alpha(z)\cdot R_\beta(y)\cdot R_\gamma(z)
\end{aligned}$$

軸が全て z 軸で同じなので順序を変えて良い $R_\alpha(z)^{-1} R_\alpha(z) = 1$

結局, 元の $x\,y\,z$ 軸で z 周りに γ, → y 周りに β, → z 周りに α

回転操作のユニタリ演算子。

前節までの話に従って、$\hat{n}$ 軸まわりの角度 θ の回転 $R_\theta(\hat{n})$ に対応するユニタリ変換，角運動量演算子を用いて，

$$R_\theta(\hat{n}) = e^{-i\hat{n}\cdot J}$$

と書ける。これからオイラー角による一般の回転（に対応するユニタリ変換）を下のように書く。

$$R(\alpha,\beta,\gamma) = e^{-iJ_z\alpha}, e^{-iJ_y\beta}, e^{-iJ_z\gamma}$$ ← $\hbar = 1$

これら回転操作は群をつくり、それぞれが連続なパラメター $\hat{n}$, θ および α,β,γ 等により決まる。このような群を連続群と呼ぶ。

$$[J_i, J_j] = i\hbar\, \varepsilon_{ijk} J_k$$