6 27 土

## 前回の復習

$$[J_{1i}, J_{1j}] = i\hbar\varepsilon_{ijk}J_{1k}$$
$$[J_{2i}, J_{2j}] = i\hbar\varepsilon_{ijk}J_{2k}$$

角運動量の合成　$J = J_1 + J_2$

$$\begin{cases} J_1^2 |j_1 m_1\rangle_1 = \hbar^2 j_1(j_1+1)|j_1 m_1\rangle_1 \\ J_{1z}|j_1 m_1\rangle_1 = \hbar m_1 |j_1 m_1\rangle_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} J_2^2 |j_2 m_2\rangle_2 = \hbar^2 j_2(j_2+1)|j_2 m_2\rangle_2 \\ J_{2z}|j_2 m_2\rangle_2 = \hbar m_2 |j_2 m_2\rangle_2 \end{cases}$$

$$[J_i, J_j] = i\hbar\varepsilon_{ijk}J_k$$
$$\Rightarrow \begin{cases} J^2|jm\rangle = \hbar^2 j(j+1)|jm\rangle \\ J_z|jm\rangle = \hbar m|jm\rangle \end{cases}$$

$$|jm\rangle = |j_1 m_1 j_2 m_2\rangle \underbrace{\langle j_1 m_1 j_2 m_2|jm\rangle}_{\text{係数} \to \text{クレブシュゴルダン係数}} \quad \left(= \langle jm|j_1 m_1 j_2 m_2\rangle^*\right)$$

$$\begin{cases} \langle j_1 m_1 j_2 m_2|jm\rangle\langle jm|j_1 m_1' j_2 m_2'\rangle = \delta_{m_1 m_1'}\delta_{m_2 m_2'} \\ \langle jm|j_1 m_1 j_2 m_2\rangle\langle j_1 m_1 j_2 m_2|j'm'\rangle = \delta_{jj'}\delta_{mm'} \end{cases}$$

$j_1, j_2 \to j$?

$$j = j_{max}, j_{max}-1, \cdots, j_{min} \quad \begin{pmatrix} j_{max} = j_1 + j_2 \\ j_{min} = |j_1 - j_2| \end{pmatrix}$$

全状態数
$|j_1 m_1\rangle_1$ : $m_1 = -j_1, \cdots, j_1$　　$2j_1+1$ コ
$|j_2 m_2\rangle_2$ : $m_2 = -j_2, \cdots, j_2$　　$2j_2+1$ コ

$$\Rightarrow |j_1 m_1\rangle_1 \otimes |j_2 m_2\rangle_2 : \underline{\underline{(2j_1+1)(2j_2+1)}} \text{ コ}$$

6・27・土

具体例

① $j_1 = \frac{1}{2}$, $j_2 = \frac{1}{2}$

$j_{max} = \frac{1}{2}+\frac{1}{2} = 1$, $j_{min} = \frac{1}{2}-\frac{1}{2} = 0$ $\Rightarrow j = 1, 0$

$\boxed{\frac{1}{2} \otimes \frac{1}{2} = 1 \oplus 0}$

状態数 $(2\cdot\frac{1}{2}+1)(2\cdot\frac{1}{2}+1) = 4$ , $(2\cdot1+1)+(2\cdot0+1) = 4$

② $j_1 = 1$, $j_2 = \frac{1}{2}$

$j_{max} = 1+\frac{1}{2} = \frac{3}{2}$, $j_{min} = 1-\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ $\Rightarrow j = \frac{3}{2}, \frac{1}{2}$

$\boxed{1 \otimes \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \oplus \frac{1}{2}}$

状態数 $(2\cdot1+1)(2\cdot\frac{1}{2}+1) = 6$ , $(2\cdot\frac{3}{2}+1)+(2\cdot\frac{1}{2}+1) = 6$

③ $j_1 = 1$, $j_2 = 1$

$j_{max} = 1+1 = 2$, $j_{min} = 1-1 = 0$ $\Rightarrow j = 2, 1, 0$

$\boxed{1 \otimes 1 = 2 \oplus 1 \oplus 0}$

状態数 $(2\cdot1+1)(2\cdot1+1) = 9$ , $(2\cdot2+1)+(2\cdot1+1)+(2\cdot0+1) = 9$

$J_+|j,m\rangle = \hbar\sqrt{(j-m)(j+m+1)}\,|j,m+1\rangle$
$J_-|j,m\rangle = \hbar\sqrt{(j+m)(j-m+1)}\,|j,m-1\rangle$

Date 6 27 土

## 既約テンソル演算子

まず, 球面調和関数 $Y_{\ell m}$, 任意の関数 $f$ として

$$L_z(Y_{\ell m}f) = (L_z Y_{\ell m})f + Y_{\ell m}L_z f$$
$$= \hbar m Y_{\ell m}f + Y_{\ell m}L_z f \quad \cdots ①$$

$$L_\pm(Y_{\ell m}f) = (L_\pm Y_{\ell m})f + Y_{\ell m}L_\pm f$$
$$= \hbar\sqrt{(\ell\mp m)(\ell\pm m+1)}\,Y_{\ell m\pm1}f + Y_{\ell m}L_\pm f \quad \cdots ②$$

これを次のように書く。
①の $Y_{\ell m}L_z f$ を左辺に移項すると

$$[L_z, Y_{\ell m}] = \hbar m Y_{\ell m}$$

同様に ②から

$$[L_\pm, Y_{\ell m}] = \hbar\sqrt{(\ell\mp m)(\ell\pm m+1)}\,Y_{\ell m\pm1}$$

よって球面調和関数を $\ell$を$k$, $m$を$q$ と一般化して 0以上の整数 $k$ に対して,
$T_q^{(k)}$, $q=-k, -k+1, \cdots, k$ という $2k+1$コの演算子で以下の関係式を満たすものを, $k$階の既約テンソル演算子と呼ぶ

$$[J_z, T_q^{(k)}] = \hbar q T_q^{(k)}$$

$$[J_\pm, T_q^{(k)}] = \hbar\sqrt{(k\mp q)(k\pm q+1)}\,T_{q\pm1}^{(k)}$$

より一般に前章の議論によればベクトル演算子

$$\mathbb{V} = \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{pmatrix}$$

は 軌道角運動量演算子 $\mathbb{L}$に対して

$$[L_i, V_j] = i\hbar\varepsilon_{ijk}V_k$$

を満たすものであり, 座標 $\mathbb{r}$, 運動量 $\mathbb{p}$, 角運動量 $\mathbb{J}$ がこれを満たした。

6・27・土

$$\begin{cases} T_1^{(1)} = -\frac{1}{\sqrt{2}}(V_x + iV_y) = -\frac{1}{\sqrt{2}}V_+ \\ T_0^{(1)} = V_z \\ T_{-1}^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{2}}(V_x - iV_y) = \frac{1}{\sqrt{2}}V_- \end{cases}$$

とすると，これが1階の既約テンソル演算子となる．

$J_i = L_i$として繰り返しをいとわず書けば，$k=1$とすれば

$$[L_z, T_q^{(1)}] = \hbar q T_q^{(1)}$$

$$[L_\pm, T_q^{(1)}] = \hbar\sqrt{(1\mp q)(2\pm q)}\, T_{q\pm1}^{(1)}$$

具体的に書けば

$$[L_+, T_1^{(1)}] = 0, \quad [L_-, T_1^{(1)}] = \hbar\sqrt{2}\, T_0^{(1)}$$

$$[L_+, T_0^{(1)}] = \hbar\sqrt{2}\, T_1^{(1)}, \quad [L_-, T_0^{(1)}] = \hbar\sqrt{2}\, T_{-1}^{(1)}$$

$$[L_+, T_{-1}^{(1)}] = \hbar\sqrt{2}\, T_0^{(1)}, \quad [L_-, T_{-1}^{(1)}] = 0$$

---

$$[L_+, T_1^{(1)}] = -\frac{1}{\sqrt{2}}[L_+, V_x + iV_y] = -\frac{1}{\sqrt{2}}[L_x + iL_y, V_x + iV_y]$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2}} i\hbar (V_z - V_z) = 0$$

$$[L_+, T_0^{(1)}] = [L_x + iL_y, V_z] = \hbar(-iV_y - V_x) = \hbar\sqrt{2}\, T_1^{(1)}$$

$$[L_+, T_{-1}^{(1)}] = \frac{1}{\sqrt{2}}[L_x + iL_y, V_x - iV_y] = \frac{1}{\sqrt{2}} i\hbar(V_z + V_z)$$

$$= \hbar\sqrt{2}\, T_0^{(1)}$$

$L_-$の場合も同様

6 27 土

## 既約テンソル演算子の積

ここでは次のような $k_i$ 階の既約テンソル演算子の積を考える。

$$T_q^{(k)} = T_{q_1}^{(k_1)} T_{q_2}^{(k_2)} \langle k_1 q_1, k_2 q_2 | k q \rangle$$

$T_q^{(k)}$ は $k = k_1 + k_2$ 階の既約テンソル演算子となる。

これは、Clebsch－Gordon 係数の対称性も使って以下のように書ける

$$\underbrace{T_{q_1}^{(k_1)} T_{q_2}^{(k_2)}}_{\text{既約ではない 可約}} = T_q^{(k)} \langle k q | k_1 q_1, k_2 q_2 \rangle$$

$$= \langle k_1 q_1, k_2 q_2 | k q \rangle T_q^{(k)}$$

∴ 既約テンソルの積は既約テンソルの和に分解できる

例　2つのベクトル演算子の積

2つのベクトル演算子 $\mathbb{U}, \mathbb{V}$ からテンソル

$$(UV)_{ij,i'j'} = U_{ii'} V_{jj'}$$

を構成できるが、一般にこれは既約でない。可約

0階の既約テンソル（スカラー）

$$T_0^{(0)} = -\frac{1}{3} \mathbb{U} \cdot \mathbb{V}$$

1階の既約テンソル（ベクトル）

$$T_q^{(1)} = \frac{i}{\sqrt{2}} (\mathbb{U} \times \mathbb{V})_q$$

2階の既約テンソル

$$T_2^{(2)} = U_{-1} V_{-1}, \quad T_1^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{2}} (U_0 V_1 + U_1 V_0)$$

$$T_0^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{6}} (U_{-1} V_1 + 2 U_0 V_0 + U_1 V_{-1})$$

$$T_{-1}^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{2}} (U_0 V_{-1} + U_{-1} V_0), \quad T_{-2}^{(2)} = U_{-1} V_{-1}$$

☆ 既約テンソルとウィグナー・エッカートの定理