量子力学3 第15回　　　　　　　　　　　　　　　　　　201810880 不破悠

復習

角運動量の合成

$\underset{\sim\sim\sim}{\mathbb{J} = \mathbb{J}_1 + \mathbb{J}_2}$,
$$\begin{cases} \mathbb{J}_1^2 |j_1 m_1\rangle_1 = \hbar^2 j_1(j_1+1)|j_1 m_1\rangle_1 \\ J_{1z} |j_1 m_1\rangle_1 = \hbar m_1 |j_1 m_1\rangle_1 \end{cases} \quad |j_1 m_1\rangle_1$$
$$\begin{cases} \mathbb{J}_2^2 |j_2 m_2\rangle_2 = \hbar^2 j_2(j_2+1)|j_2 m_2\rangle_2 \\ J_{2z} |j_2 m_2\rangle_2 = \hbar m_2 |j_2 m_2\rangle_2 \end{cases} \quad |j_2 m_2\rangle_2$$

$$[J_{1i}, J_{1j}] = i\hbar \varepsilon_{ijk} J_{1k}$$
$$[J_{2i}, J_{2j}] = i\hbar \varepsilon_{ijk} J_{2k}$$

$[J_i, J_j] = i\hbar\varepsilon_{ijk}J_k$

$\longrightarrow \quad \mathbb{J}^2 |jm\rangle = \hbar^2 j(j+1)|jm\rangle$

$\qquad J_z |jm\rangle = \hbar m |jm\rangle$

$|jm\rangle \leftrightarrow |j_1 m_1\rangle_1 \otimes |j_2 m_2\rangle_2 = |j_1 m_1\rangle |j_2 m_2\rangle$
$\qquad = |j_1 m_1 j_2 m_2\rangle = |m_1 m_2\rangle$

$|jm\rangle \leftrightarrow |m_1 m_2\rangle$ 線形結合

$|jm\rangle = |j_1 m_1 j_2 m_2\rangle \langle j_1 m_1 j_2 m_2 | jm\rangle$

クレブシュ=ゴルダン係数
CG係数

$$\begin{cases} \langle j_1 m_1 j_2 m_2 | jm\rangle \langle jm | j_1 m_1' j_2 m_2'\rangle = \delta_{m_1 m_1'}\delta_{m_2 m_2'} \\ \langle jm | j_1 m_1 j_2 m_2\rangle \langle j_1 m_1 j_2 m_2 | j'm'\rangle = \delta_{jj'}\delta_{mm'} \end{cases}$$

j_1 j_2 $\longrightarrow j$?

$j = j_{max}, j_{max}-1, \cdots, j_{min}$ 　　$j_{max} = j_1 + j_2$, $j_{min} = |j_1 - j_2|$

全状態数 $|j_1 m_1\rangle_1$: $m_1 = -j_1 \cdots j_1$ 　$2j_1+1$ コ

$\qquad |j_2 m_2\rangle_2$: $m_2 = -j_2 \cdots j_1$ 　$2j_2+1$ コ

$|j_1 m_1\rangle_1 \otimes |j_2 m_2\rangle$: $(2j_1+1)(2j_2+1)$ コ

$|jm\rangle$ 　なんこ? 　$\displaystyle\sum_{j=j_{min}}^{j_{max}} (2j+1) = (2j_1+1)(2j_2+1)$

具体例

① $j_1 = 1/2,\ j_2 = 1/2$

$\longrightarrow j_{max} = 1/2 + 1/2 = 1,\ j_{min} = j_1 - j_2 = 1/2 - 1/2 = 0$

$j = 1, 0$

$1/2 \otimes 1/2 = 1 \oplus 0$

状態数 $\left(2\cdot\frac{1}{2}+1\right)\left(2\cdot\frac{1}{2}+1\right)$

$= 2\times 2 = 4$

$2\cdot 1 + 1 = 3$
$2\cdot 0 + 1 = 1$

② $j_1 = 1,\ j_2 = 1/2$

$j_{max} = 1 + 1/2 = 3/2$

$j_{min} = 1 - 1/2 = 1/2$

$1 \otimes 1/2 = 3/2 \oplus 1/2 \longrightarrow$ $2\cdot\frac{3}{2}+1 = 3+1 = 4$, $2\cdot\frac{1}{2}+1 = 1+1 = 2$ $\rightarrow 6$

$(2\cdot 1+1)(2\cdot 1/2+1) = 3\times 2 = 6$

③ $j_1 = 1,\ j_2 = 1$

$j_{max} = 1 + 1 = 2$

$j_{min} = 1 - 1 = 0$

$j = 2, 1, 0$

$1 \otimes 1 = 2 \oplus 1 \oplus 0$

$(2\cdot 1+1)(2\cdot 1+1) = 3\times 3 = 9$

$2\cdot 2+1 = 5$
$2\cdot 1+1 = 3$
$2\cdot 0+1 = 1$
9

CG係数で決めた!

既約テンソル演算子

$$J_+|j,m\rangle = \hbar\sqrt{(j-m)(j+m+1)}|j,m+1\rangle,$$
$$J_-|j,m\rangle = \hbar\sqrt{(j+m)(j-m+1)}|j,m-1\rangle,$$

まず，球面調和関数 Y_{lm}，任意の関数 f として

$$L_z(Y_{lm}f) = (L_z Y_{lm})f + Y_{lm}L_z f$$
$$= \hbar m Y_{lm} f + Y_{lm}L_z f$$
$$L_\pm(Y_{lm}f) = (L_\pm Y_{lm})f + Y_{lm}L_\pm f$$
$$= \hbar\sqrt{(l\mp m)(l\pm m+1)}\,Y_{lm\pm1}f + Y_{lm}L_\pm f$$

これを次のように書こう

$$[L_z, Y_{lm}] = \hbar m Y_{lm}$$
$$[L_\pm, Y_{lm}] = \hbar\sqrt{(l\mp m)(l\pm m+1)}\,Y_{lm\pm1}$$

よって球面調和関数を一般化して0以上の整数 k に対して，$T_p^{(k)}$，$q=-k,-k+1,\ldots$ $\ldots, k-1, k$ という $2k+1$ 個の演算子を以下の関係式を満たすものを k 階の
既約テンソル演算子と呼ぶ。

$$[J_z, T_q^{(k)}] = \hbar q T_q^{(k)}$$
$$[J_\pm, T_q^{(k)}] = \hbar\sqrt{(k\mp q)(k\pm m+1)}\,T_{q\pm1}^{(k)}$$

より一般に前章の議論によればベクトル演算子 $V=\begin{pmatrix}V_x\\V_y\\V_z\end{pmatrix}$ とは軌道角運動量 $\mathbb{L}$ に対して

$$[L_i, L_j] = i\hbar\varepsilon_{ijk}L_k \quad [L_i,\cdot] = 0\cdot$$

$$\boxed{[L_i, V_j] = i\hbar\varepsilon_{ijk}V_k} \quad \text{ベクトル演算子}$$

を満たすものであり，座標 $\mathbb{r}$，運動量 $\mathbb{P}$，角運動量 $\mathbb{J}$ がこれを満たした。

$$\begin{cases} T_1^{(1)} = -1/\sqrt{2}(V_x+iV_y) = -1/\sqrt{2}\,V_+ \\ T_0^{(1)} = V_z \\ T_{-1}^{(1)} = 1/\sqrt{2}(V_x-iV_y) = 1/\sqrt{2}\,V_- \end{cases}$$

とすると，これが1階の既約テンソル演算子となる。

$J_i = L_i$ として繰り返しをいとわず書けば，$k=1$ とすれば

$$[L_z, T_q^{(1)}] = \hbar q T_q^{(1)}$$
$$[L_\pm, T_q^{(1)}] = \hbar\sqrt{(1\mp q)(2\pm q)}\,T_{q\pm1}^{(1)}$$

$$[L_x, V_x] = i\hbar\varepsilon_{xx}\ V_k = 0$$

$$[L_x, V_y] = i\hbar V_z$$

$\vdots$

具体的に書けば，

$$[L_+, T_1^{(1)}] = 0, \quad [L_-, T_1^{(1)}] = \hbar\sqrt{2}T_0^{(1)}$$
$$[L_+, T_0^{(1)}] = \hbar\sqrt{2}T_1^{(1)}, \quad [L_-, T_0^{(1)}] = \hbar\sqrt{2}T_{-1}^{(1)}$$
$$[L_+, T_{-1}^{(1)}] = \hbar\sqrt{2}T_0^{(1)}, \quad [L_-, T_{-1}^{(1)}] = 0$$

（Pdfファイルがくにゃ。）

既約テンソル演算子の積

ここでは次のようなk_i階の既約テンソル演算子の積を考えてみよう

$$T_q^{(k)} = T_{q_1}^{(k_1)} T_{q_2}^{(k_2)} \langle k_1 q_1, k_2 q_2 | k q \rangle$$

$T_q^{(k)}$は$k = k_1 + k_2$階の既約テンソル演算子となる.

これは, Clebsch-Gordan係数の対称性も使って以下の様にかける.

$$T_{q_1}^{(k_1)} T_{q_2}^{(k_2)} = T_q^{(k)} \langle kq | k_1 q_1, k_2 q_2 \rangle$$
$$= \langle k_1 q_1, k_2 q_2 | kq \rangle T_q^{(k)}$$

既約ではない → 可約

∴既約テンソルの積は既約テンソルの和に分解できる.

例) 2つのベクトル演算子の積

2つのベクトル演算子$\mathbb{U}, \mathbb{V}$からテンソル

$$(\mathbb{U}\mathbb{V})_{q_i q_i'} = U_{q_i} V_{q_i'}$$

を構成できるが, 一般にこれは既約ではない。∴既約テンソルの和に分解できる。

可約

0階の既約テンソル (スカラー)

$$T_0^{(0)} = -\frac{1}{3} \mathbb{U} \cdot \mathbb{V}$$

1階の既約テンソル (ベクトル)

$$T_q^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathbb{U} \times \mathbb{V})_q$$

2階の既約テンソル

$$T_2^{(2)} = U_{-1} V_{-1} \qquad T_1^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{2}} (U_0 V_1 + U_1 V_0)$$

$$T_0^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{6}} (U_{-1} V_1 + 2 U_0 V_0 + U_1 V_{-1})$$

$$T_{-1}^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{2}} (U_0 V_{-1} + U_{-1} V_0) \qquad T_{-2}^{(2)} = U_{-1} V_{-1}$$

既約テンソルとウィグナー・エッカートの定理