6/23

量子力学3

2018|0850 後藤虎斗

例1: 具体的なクレブシュゴルダン係数

$$\boxed{\frac{1}{2}\otimes\frac{1}{2}=1\oplus 0}$$

$j_1=\frac{1}{2},\ j_2=\frac{1}{2},\ \hbar=1$ として, $m=m_1+m_2$ ごとの基底を次のようにとって

$\Psi_1=\left(\left|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle\right)=(|\uparrow\uparrow\rangle)$

$\Psi_0=\left(\left|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle,\left|-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle\right)=(|\uparrow\downarrow\rangle,|\downarrow\uparrow\rangle)$

$\Psi_{-1}=\left(\left|-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle\right)=(|\downarrow\downarrow\rangle)$

$j=1$

$|11\rangle=|\uparrow\uparrow\rangle=\Psi_1(1)$

$|10\rangle=\frac{1}{\sqrt2}(|\uparrow\downarrow\rangle+|\downarrow\uparrow\rangle)=\Psi_0\begin{pmatrix}\frac{\sqrt2}{2}\\ \frac{\sqrt2}{2}\end{pmatrix}$

$|1-1\rangle=|\downarrow\downarrow\rangle=\Psi_{-1}(1)$

$|00\rangle=\frac{1}{\sqrt2}(|\uparrow\downarrow\rangle-|\downarrow\uparrow\rangle)=\Psi_0\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt2}\\ -\frac{1}{\sqrt2}\end{pmatrix}$

$j=0$

これはクレブシュゴルダン係数を使えば次のようにかける

$|jm\rangle=|j_1m_1j_2m_2\rangle\langle j_1m_1j_2m_2|jm\rangle$

$|1,1\rangle=\left|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle\left\langle\frac{1}{2},\frac{1}{2}\middle|1,1\right\rangle$

$|1,0\rangle=\left|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle\left\langle\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\middle|1,0\right\rangle+\left|-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle\left\langle-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\middle|1,0\right\rangle$

$|0,0\rangle=\left|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle\left\langle\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\middle|0,0\right\rangle+\left|-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle\left\langle-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\middle|0,0\right\rangle$

$|1,-1\rangle=\left|-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle\left\langle-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\middle|1,-1\right\rangle$

まとめ

表2.1: $\langle j_1m_1j_2m_2|jm\rangle,\ j_1=1,\ j_2=\frac{1}{2},\ j=\frac{1}{2}$

j	m	m_1	m_2	$\langle j_1m_1j_2m_2\|jm\rangle$
1	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1
1	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt2}{2}$
1	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt2}{2}$
1	−1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1

表2.2: $\langle j_1m_1j_2m_2|jm\rangle,\ j_1=\frac{1}{2},\ j_2=\frac{1}{2},\ j=0$

j	m	m_1	m_2	$\langle j_1m_1j_2m_2\|jm\rangle$
0	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt2}{2}$
0	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt2}{2}$

例2: 具体的なクレブシュゴルダン係数

$$\boxed{1\otimes\frac{1}{2}=\frac{3}{2}\oplus\frac{1}{2}}$$

m一定の基底:

$m=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$ は $|1\rangle|\frac{1}{2}\rangle$ のみで $j=m=3/2$

$\Psi_{\frac{3}{2}}=\left(|1\rangle|\tfrac{1}{2}\rangle\right)\quad \Psi_{\frac{1}{2}}=\left(|1\rangle|-\tfrac{1}{2}\rangle,|0\rangle|\tfrac{1}{2}\rangle\right)$

$\Psi_{-\frac{1}{2}}=\left(|-1\rangle|\tfrac{1}{2}\rangle,|0\rangle|-\tfrac{1}{2}\rangle\right)\quad \Psi_{-\frac{3}{2}}=\left(|-1\rangle|-\tfrac{1}{2}\rangle\right)$

$|\tfrac{3}{2}\tfrac{3}{2}\rangle=|1\rangle|\tfrac{1}{2}\rangle=\Psi_{\frac{3}{2}}(1)$

$j=\frac{3}{2}$の公式より $J_-|\tfrac{3}{2}\tfrac{3}{2}\rangle=\sqrt3|\tfrac{3}{2}\tfrac{1}{2}\rangle$

$|\tfrac{3}{2}\tfrac{1}{2}\rangle=\frac{1}{\sqrt3}J_-|\tfrac{3}{2}\tfrac{3}{2}\rangle=\frac{1}{\sqrt3}(J_{1-}+J_{2-})|1\rangle|\tfrac{1}{2}\rangle$

$=\frac{1}{\sqrt3}\left\{J_{1-}|1\rangle|\tfrac{1}{2}\rangle+|1\rangle J_{2-}|\tfrac{1}{2}\rangle\right\}$

$=\frac{1}{\sqrt3}\left\{\sqrt2|0\rangle|\tfrac{1}{2}\rangle+|1\rangle|-\tfrac{1}{2}\rangle\right\}$

$=\Psi_{\frac{1}{2}}\begin{pmatrix}\frac{\sqrt3}{3}\\ \frac{\sqrt6}{3}\end{pmatrix}\qquad J_-|11\rangle=\sqrt2|10\rangle$

続いて $J_-|\tfrac{3}{2}\tfrac{1}{2}\rangle=2|\tfrac{3}{2}-\tfrac{1}{2}\rangle$ もうらせない

$|\tfrac{3}{2}-\tfrac{1}{2}\rangle=\frac{1}{2}J_-|\tfrac{3}{2}\tfrac{1}{2}\rangle=\frac{1}{2}(J_{1-}+J_{2-})\left\{\frac{\sqrt6}{3}|0\rangle|\tfrac{1}{2}\rangle+\frac{\sqrt3}{3}|1\rangle|-\tfrac{1}{2}\rangle\right\}$

$=\frac{\sqrt6}{6}\left\{J_-|0\rangle|\tfrac{1}{2}\rangle+|0\rangle J_{2-}|\tfrac{1}{2}\rangle\right\}+\frac{\sqrt3}{6}\left\{J_{1-}|1\rangle|-\tfrac{1}{2}\rangle+|1\rangle J_{2-}|-\tfrac{1}{2}\rangle\right\}$

$=\frac{\sqrt6}{6}\left\{\sqrt2|-1\rangle|\tfrac{1}{2}\rangle+|0\rangle|-\tfrac{1}{2}\rangle\right\}+\frac{\sqrt3}{6}\sqrt2|0\rangle|-\tfrac{1}{2}\rangle$

$=\frac{\sqrt3}{3}|-1\rangle|\tfrac{1}{2}\rangle+\frac{\sqrt6}{3}|0\rangle|-\tfrac{1}{2}\rangle\qquad J_{2-}|\tfrac{1}{2}\tfrac{1}{2}\rangle_2=|\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}\rangle_2$

$J_-|\tfrac{3}{2}-\tfrac{1}{2}\rangle=\sqrt3|\tfrac{3}{2}-\tfrac{3}{2}\rangle$

$=\Psi_{-\frac{1}{2}}\begin{pmatrix}\frac{\sqrt3}{3}\\ \frac{\sqrt6}{3}\end{pmatrix}$

次に $|\tfrac{3}{2}-\tfrac{3}{2}\rangle=\frac{1}{\sqrt3}J_-|\tfrac{3}{2}-\tfrac{1}{2}\rangle$

$=\frac{1}{\sqrt3}(J_{1-}+J_{2-})\left\{\frac{\sqrt3}{3}|-1\rangle|\tfrac{1}{2}\rangle+\frac{\sqrt6}{3}|0\rangle|-\tfrac{1}{2}\rangle\right\}$

$=\frac{1}{3}|-1\rangle J_{2-}|\tfrac{1}{2}\rangle+\frac{\sqrt2}{3}J_{1-}|0\rangle|-\tfrac{1}{2}\rangle$

$=\frac{1}{3}|-1\rangle|-\tfrac{1}{2}\rangle+\frac{\sqrt2}{3}\sqrt2|-1\rangle|-\tfrac{1}{2}\rangle$

$=\Psi_{-\frac{3}{2}}(1)$

以上の手続きをもう少し見通しよく行う。まず最初に基底の変換をつぎのように計算しておく $\Psi_{\frac{1}{2}}=\left(|1\rangle|-\tfrac{1}{2}\rangle,|0\rangle|\tfrac{1}{2}\rangle\right)$

$J_-\Psi_{\frac{3}{2}}=(J_{1-}+J_{2-})\left(|1\rangle|\tfrac{1}{2}\rangle\right)=\left(\sqrt2|0\rangle|\tfrac{1}{2}\rangle+|1\rangle|-\tfrac{1}{2}\rangle\right)=\Psi_{\frac{1}{2}}\begin{pmatrix}1\\ \sqrt2\end{pmatrix}$

$J_-\Psi_{\frac{1}{2}}=(J_{1-}+J_{2-})\left(|1\rangle|-\tfrac{1}{2}\rangle,|0\rangle|\tfrac{1}{2}\rangle\right)=\left(\sqrt2|0\rangle|-\tfrac{1}{2}\rangle,\sqrt2|-1\rangle|\tfrac{1}{2}\rangle+|0\rangle|-\tfrac{1}{2}\rangle\right)$

$=\Psi_{-\frac{1}{2}}\begin{pmatrix}0&\sqrt2\\ \sqrt2&1\end{pmatrix}\qquad \Psi_{-\frac{1}{2}}=\left(|-1\rangle|\tfrac{1}{2}\rangle,|0\rangle|-\tfrac{1}{2}\rangle\right)$

$J_-\Psi_{-\frac{1}{2}}=(J_{1-}+J_{2-})\left(|-1\rangle|\tfrac{1}{2}\rangle,|0\rangle|-\tfrac{1}{2}\rangle\right)=\left(|-1\rangle|-\tfrac{1}{2}\rangle,\sqrt2|-1\rangle|-\tfrac{1}{2}\rangle\right)$

$=\Psi_{-\frac{3}{2}}(1,\sqrt2)$

$\Psi_{-\frac{3}{2}}=\left(|-1\rangle|-\tfrac{1}{2}\rangle\right)$

No.

Date

公式 $J_+|j,m\rangle=\hbar\sqrt{(j-m)(j+m+1)}\,|j,m+1\rangle$,

$J_-|j,m\rangle=\hbar\sqrt{(j+m)(j-m+1)}\,|j,m-1\rangle$,

特に $j=\frac12$ の場合

$J_+|\frac12,\frac12\rangle=0$, $J_+|\frac12,-\frac12\rangle=\hbar|\frac12,\frac12\rangle$,

$J_-|\frac12,\frac12\rangle=\hbar|\frac12,-\frac12\rangle$, $J_-|\frac12,-\frac12\rangle=0$

特に $j=1$ の場合

$J_+|1,m\rangle=\hbar\sqrt{(1-m)(2+m)}\,|1,m+1\rangle$

$J_-|1,m\rangle=\hbar\sqrt{(1+m)(2-m)}\,|1,m-1\rangle$

$J_+|1,1\rangle=0$, $J_+|1,0\rangle=\hbar\sqrt2|1,1\rangle$, $J_+|1,-1\rangle=\hbar\sqrt2|1,0\rangle$

$J_-|1,1\rangle=\hbar\sqrt2|1,0\rangle$; $J_-|1,0\rangle=\hbar\sqrt2|1,-1\rangle$; $J_-|1,-1\rangle=0$

これを用いれば:

$|\frac32\frac32\rangle=\Psi_{\frac32}(1)$ $\Psi_{\frac12}(1\ \sqrt2)$

$|\frac32\frac12\rangle\overset{Ⓐ}{=}\frac{1}{\sqrt3}J_-\Psi_{\frac32}(1)=\Psi_{\frac12}\begin{pmatrix}\frac{\sqrt3}{3}\\ \frac{\sqrt6}{3}\end{pmatrix}$

$|\frac32-\frac12\rangle\overset{Ⓑ}{=}\frac12J_-|\frac32\frac12\rangle=\frac12J_-\Psi_{\frac12}\begin{pmatrix}\frac{\sqrt3}{3}\\ \frac{\sqrt6}{3}\end{pmatrix}$

$=\Psi_{-\frac12}\begin{pmatrix}0&\sqrt2\\ \sqrt2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\sqrt3}{6}\\ \frac{\sqrt6}{6}\end{pmatrix}=\Psi_{-\frac12}\begin{pmatrix}\frac{\sqrt3}{3}\\ \frac{\sqrt6}{3}\end{pmatrix}$

$|\frac32-\frac32\rangle\overset{Ⓒ}{=}\frac{1}{\sqrt3}J_-|\frac32-\frac12\rangle=\frac{1}{\sqrt3}J_-\Psi_{-\frac12}\begin{pmatrix}\frac{\sqrt3}{3}\\ \frac{\sqrt6}{3}\end{pmatrix}$

$=\Psi_{-\frac32}(1,\sqrt2)\begin{pmatrix}1/3\\ \sqrt2/3\end{pmatrix}=\Psi_{-\frac32}(1)$

特に $j=\frac32$ の場合

$J_+|\frac32,m\rangle=\hbar\sqrt{(\frac32-m)(\frac52+m)}\,|\frac32,m+1\rangle$

$J_-|\frac32,m\rangle=\hbar\sqrt{(\frac32+m)(\frac52-m)}\,|\frac32,m-1\rangle$

$J_+|\frac32\frac32\rangle=0$, $J_+|\frac32\frac12\rangle=\hbar\sqrt3|\frac32\frac32\rangle$, $J_+|\frac32-\frac12\rangle=\hbar2|\frac32\frac12\rangle$,

$J_+|\frac32-\frac32\rangle=\hbar\sqrt3|\frac32-\frac12\rangle$, $J_-|\frac32\frac32\rangle=\hbar\sqrt3|\frac32\frac12\rangle$ Ⓐ, $J_-|\frac32\frac12\rangle=\hbar2|\frac32-\frac12\rangle$ Ⓑ

$J_-|\frac32-\frac12\rangle=\hbar\sqrt3|\frac32-\frac32\rangle$ Ⓒ, $J_-|\frac32-\frac32\rangle=0$

表2.3: $\langle j_1m_1j_2m_2|jm\rangle$, $j_1=1$, $j_2=\frac12$, $j=\frac32$

j	m	m_1	m_2	$\langle j_1m_1j_2m_2\|jm\rangle$	備考
$\frac32$	$\frac32$	1	$\frac12$	1	$\Psi_{\frac32}=(\|1\rangle\|\frac12\rangle)$
$\frac32$	$\frac12$	1	$-\frac12$	$\frac{\sqrt3}{3}$	$\Psi_{\frac12}=(\|1\rangle\|-\frac12\rangle, \|0\rangle\|\frac12\rangle)$
$\frac32$	$\frac12$	0	$\frac12$	$\frac{\sqrt6}{3}$	$\Psi_{-\frac12}=(\|-1\rangle\|\frac12\rangle, \|0\rangle\|-\frac12\rangle)$
$\frac32$	$-\frac12$	-1	$\frac12$	$\frac{\sqrt3}{3}$	$\Psi_{-\frac32}=(\|-1\rangle\|-\frac12\rangle)$
$\frac32$	$-\frac12$	0	$-\frac12$	$\frac{\sqrt6}{3}$	
$\frac32$	$-\frac32$	-1	$-\frac12$	1	

次に $j=\frac12$ の固有状態を構成する。$m=m_1+m_2=\frac12$ の空間は $\Psi_{\frac12}$ で2次元の基底で張られているが、$\Psi_{\frac32}$ から J_- を作用させて、$|\frac32\frac12\rangle$ として1状態既に使われているので、$|\frac12\frac12\rangle$ をそれと直行するように定める。 $|\frac12\frac12\rangle\perp|\frac32\frac12\rangle$

$|\frac32\frac12\rangle=\Psi_{\frac12}\begin{pmatrix}\sqrt3/3\\ \sqrt6/3\end{pmatrix}$, → $\langle\frac32\frac12|\frac12\frac12\rangle=(\frac{\sqrt3}{3},\frac{\sqrt6}{3})\overbrace{\Psi^\dagger_{\frac12}\Psi_{\frac12}}^{E_2}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=\frac{\sqrt3}{3}a+\frac{\sqrt6}{3}b=0$

$a=-b\sqrt2$, $a^2+b^2=3b^2=1$, $a>0$ とすれば $a=\frac{\sqrt2}{\sqrt3}$, $b=-\frac{1}{\sqrt3}$

$|\frac12\frac12\rangle=\Psi_{\frac12}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$; $a^2+b^2=1$. $|\frac12\frac12\rangle=\Psi_{\frac12}\begin{pmatrix}\sqrt6/3\\ -\sqrt3/3\end{pmatrix}$

$J_-\Psi_{\frac12}\begin{pmatrix}\sqrt6/3\\ -\sqrt3/3\end{pmatrix}$

$|\frac12-\frac12\rangle=J_-|\frac12\frac12\rangle=\Psi_{-\frac12}\begin{pmatrix}0&\sqrt2\\ \sqrt2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sqrt6/3\\ -\sqrt3/3\end{pmatrix}=\Psi_{-\frac12}\begin{pmatrix}-\sqrt6/3\\ \sqrt3/3\end{pmatrix}$

表2.4: $\langle j_1m_1j_2m_2|jm\rangle$, $j_1=1$, $j_2=\frac12$, $j=\frac12$

j	m	m_1	m_2	$\langle j_1m_1j_2m_2\|jm\rangle$	備考
$\frac12$	$\frac12$	1	$-\frac12$	$\frac{\sqrt6}{3}$	$\Psi_{\frac32}=(\|1\rangle\|\frac12\rangle)$
$\frac12$	$\frac12$	0	$\frac12$	$-\frac{\sqrt3}{3}$	$\Psi_{\frac12}=(\|1\rangle\|-\frac12\rangle, \|0\rangle\|\frac12\rangle)$
$\frac12$	$-\frac12$	-1	$\frac12$	$-\frac{\sqrt6}{3}$	$\Psi_{-\frac12}=(\|-1\rangle\|\frac12\rangle, \|0\rangle\|-\frac12\rangle)$
$\frac12$	$-\frac12$	0	$-\frac12$	$\frac{\sqrt3}{3}$	$\Psi_{-\frac32}=(\|-1\rangle\|-\frac12\rangle)$

射影演算子の方法

2次元の $\Psi_{\frac12}$ で張られる空間で規格化されている $|v\rangle=|\frac32\frac12\rangle=\Psi_{\frac12}v$, と直交する状態 $|v_\perp\rangle$ は v 方向への射影 $\boxed{P=|v\rangle\langle v|}$ を用いて、任意の(一般の)状態 $|x\rangle$ から次式で構成できる。 $v=\begin{pmatrix}\sqrt3/3\\ \sqrt6/3\end{pmatrix}$

$|v_\perp\rangle=P'|x\rangle$, $P'=1-P$, $P=|v\rangle\langle v|$ $P^2=P$, $(P')^2=P'$ $|v\rangle\langle v|v\rangle\langle v|$ $|v\rangle\langle v|=P$

$\because\langle v|v_\perp\rangle=\langle v|(1-P)|x\rangle=\langle v|x\rangle-\langle v|v\rangle\langle v|x\rangle=0$

ここで $|x\rangle=\Psi_{\frac12}x$, $x=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ とすれば;

$\langle v|x\rangle=v^\dagger\Psi^\dagger_{\frac12}\Psi_{\frac12}x=(\frac{\sqrt3}{3},\frac{\sqrt6}{3})\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\frac{\sqrt3}{3}$

$|v_\perp\rangle=|x\rangle-|v\rangle\langle v|x\rangle=\Psi_{\frac12}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}-\Psi_{\frac12}\begin{pmatrix}\sqrt3/3\\ \sqrt6/3\end{pmatrix}\frac{\sqrt3}{3}=\Psi_{\frac12}\begin{pmatrix}2/3\\ -\sqrt2/3\end{pmatrix}$

$\langle v_\perp|v_\perp\rangle=\frac69=\frac23$ だから、規格化して

$|\frac12\frac12\rangle=|v_\perp\rangle\frac{1}{\sqrt{\langle v_\perp|v_\perp\rangle}}=\Psi_{\frac12}\begin{pmatrix}\sqrt6/3\\ -\sqrt3/3\end{pmatrix}$

となり前の計算に一致する。

例3：具体的なクレブシュ・ゴルダン係数

$\boxed{1\otimes 1 = 2\oplus 1\oplus 0}$

$j_1=1,\ j_2=1 \quad j_{max}=1+1=2,\ j_{min}=1-1=0$

$\Psi_2=(|1\rangle|1\rangle)\quad \Psi_1=(|1\rangle|0\rangle, |0\rangle|1\rangle) \quad |m_1\rangle|m_2\rangle = |j_1m_1\rangle_1|j_2m_2\rangle_2$

$\Psi_0=(|1\rangle|-1\rangle, |0\rangle|0\rangle, |-1\rangle|1\rangle)\quad \Psi_{-1}=(|-1\rangle|0\rangle,|0\rangle|-1\rangle)$

$\Psi_{-2}=(|-1\rangle|-1\rangle)$

基底の変換

$J_-\Psi_2=(J_{1-}+J_{2-})(|1\rangle|1\rangle)=(\sqrt2|0\rangle|1\rangle+\sqrt2|1\rangle|0\rangle)=\Psi_1\begin{pmatrix}\sqrt2\\\sqrt2\end{pmatrix}$

$J_-\Psi_1=(J_{1-}+J_{2-})(|1\rangle|0\rangle,|0\rangle|1\rangle)=(\sqrt2|0\rangle|0\rangle+\sqrt2|1\rangle|-1\rangle, \sqrt2|-1\rangle|1\rangle+\sqrt2|0\rangle|0\rangle)$

$=\Psi_0\begin{pmatrix}\sqrt2&0\\\sqrt2&\sqrt2\\0&\sqrt2\end{pmatrix}$

$J_-\Psi_0=(J_{1-}+J_{2-})(|1\rangle|-1\rangle, |0\rangle|0\rangle, |-1\rangle|1\rangle)$

$=(\sqrt2|0\rangle|-1\rangle, \sqrt2|-1\rangle|0\rangle+\sqrt2|0\rangle|-1\rangle, \sqrt2|-1\rangle|0\rangle)$

$=\Psi_{-1}\begin{pmatrix}0&\sqrt2&\sqrt2\\\sqrt2&\sqrt2&0\end{pmatrix}$

$J_-\Psi_{-1}=(J_{1-}+J_{2-})(|-1\rangle|0\rangle,|0\rangle|-1\rangle)$

$=(\sqrt2|-1\rangle|-1\rangle, \sqrt2|-1\rangle|-1\rangle)=\Psi_{-2}(\sqrt2,\sqrt2)$

$|22\rangle=\overset{|1\rangle|1\rangle}{\Psi_2(1)}$

$|21\rangle=\frac12 J_-\Psi_2(1)=\Psi_1\begin{pmatrix}\sqrt2/2\\\sqrt2/2\end{pmatrix}$

$|20\rangle=\frac1{\sqrt6}J_-\Psi_1\begin{pmatrix}\sqrt2/2\\\sqrt2/2\end{pmatrix}=\frac1{\sqrt6}\Psi_0\begin{pmatrix}\sqrt2&0\\\sqrt2&\sqrt2\\0&\sqrt2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sqrt2/2\\\sqrt2/2\end{pmatrix}=\Psi_0\begin{pmatrix}\sqrt6/6\\\sqrt6/3\\\sqrt6/6\end{pmatrix}$

$|2-1\rangle=\frac1{\sqrt6}J_-\Psi_0\begin{pmatrix}\sqrt6/6\\\sqrt6/3\\\sqrt6/6\end{pmatrix}=\Psi_{-1}\begin{pmatrix}0&\sqrt2&\sqrt2\\\sqrt2&\sqrt2&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1/6\\1/3\\1/6\end{pmatrix}=\Psi_{-1}\begin{pmatrix}\frac{\sqrt2}{2}\\\frac{\sqrt2}{2}\end{pmatrix}$

$|2-2\rangle=\frac12 J_-\Psi_{-1}=\frac12\Psi_{-2}(\sqrt2,\sqrt2)\begin{pmatrix}\sqrt2/2\\\sqrt2/2\end{pmatrix}=\Psi_{-2}(1)$

表2.5：$\langle j_1m_1j_2m_2|jm\rangle,\ j_1=1,\ j_2=1,\ j=2$

j	m	m_1	m_2	$\langle j_1m_1j_2m_2\|jm\rangle$
2	2	1	1	1
2	1	1	0	$\sqrt2/2$
2	1	0	1	$\sqrt2/2$
2	0	1	-1	$\sqrt6/6$
2	0	0	0	$\sqrt6/3$
2	0	-1	1	$\sqrt6/6$
2	-1	-1	0	$\sqrt2/2$
2	-1	0	-1	$\sqrt2/2$
2	-2	-1	-1	1

参考

$\Psi_2=(|1\rangle|1\rangle)$

$\Psi_1=(|1\rangle|0\rangle,|0\rangle|1\rangle)$

$\Psi_0=(|1\rangle|-1\rangle, |0\rangle|0\rangle, |-1\rangle|1\rangle)$

$\Psi_{-1}=(|-1\rangle|0\rangle, |0\rangle|-1\rangle)$

$\Psi_{-2}=(|-1\rangle|-1\rangle)$

次に$j=1$の固有状態を構成する。Ψ_1は2次元の基底であるが、$|v\rangle=|21\rangle=\Psi_1\begin{pmatrix}\sqrt2/2\\\sqrt2/2\end{pmatrix}$として1つ使われているので、$|11\rangle$をそれと直交するように定める。$P=|v\rangle\langle v|$として射影の方法を用いる。

$|\phi\rangle=\Psi_1\phi,\ \phi=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$とすれば、

$|v_\perp\rangle=(1-P)|\phi\rangle=|\phi\rangle-|v\rangle\langle v|\phi\rangle=\Psi_1\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}-\Psi_1\begin{pmatrix}\sqrt2/2\\\sqrt2/2\end{pmatrix}\frac{\sqrt2}{2}=\Psi_1\begin{pmatrix}1/2\\-1/2\end{pmatrix}$

規格化して

$|11\rangle=|v_\perp\rangle\sqrt2=\Psi_1\begin{pmatrix}\sqrt2/2\\-\sqrt2/2\end{pmatrix}$

$|10\rangle=\frac1{\sqrt2}J_-|11\rangle=\frac1{\sqrt2}J_-\Psi_1\begin{pmatrix}\sqrt2/2\\-\sqrt2/2\end{pmatrix}=\frac1{\sqrt2}\Psi_0\begin{pmatrix}\sqrt2&0\\\sqrt2&\sqrt2\\0&\sqrt2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\sqrt2}{2}\\-\frac{\sqrt2}{2}\end{pmatrix}=\Psi_0\begin{pmatrix}\sqrt2/2\\0\\-\sqrt2/2\end{pmatrix}$

$|1-1\rangle=\frac1{\sqrt2}J_-|10\rangle=\frac1{\sqrt2}J_-\Psi_0\begin{pmatrix}\sqrt2/2\\0\\-\sqrt2/2\end{pmatrix}=\frac1{\sqrt2}\Psi_{-1}\begin{pmatrix}0&\sqrt2&\sqrt2\\\sqrt2&\sqrt2&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\sqrt2}{2}\\0\\-\frac{\sqrt2}{2}\end{pmatrix}$

$=\Psi_{-1}\begin{pmatrix}-\frac{\sqrt2}{2}\\\frac{\sqrt2}{2}\end{pmatrix}$

表2.6：$\langle j_1m_1j_2m_2|jm\rangle,\ j_1=1,\ j_2=1,\ j=1$

j	m	m_1	m_2	$\langle j_1m_1j_2m_2\|jm\rangle$
1	1	1	0	$\sqrt2/2$
1	1	0	1	$-\sqrt2/2$
1	0	1	-1	$\sqrt2/2$
1	0	0	0	0
1	0	1	-1	$-\sqrt2/2$
1	-1	-1	0	$-\sqrt2/2$
1	-1	0	-1	$\sqrt2/2$

参考

$\Psi_2=(|1\rangle|1\rangle)$

$\Psi_1=(|1\rangle|0\rangle, |0\rangle|1\rangle)$

$\Psi_0=(|1\rangle|-1\rangle, |0\rangle|0\rangle, |-1\rangle|1\rangle)$

$\Psi_{-1}=(|-1\rangle|0\rangle, |0\rangle|-1\rangle)$

$\Psi_{-2}=(|-1\rangle|-1\rangle)$

残りはΨ_0に属する$|00\rangle$である。$|00\rangle$は$|u\rangle=|20\rangle=\Psi_0\begin{pmatrix}\sqrt6/6\\\sqrt6/3\\\sqrt6/6\end{pmatrix}$と$|v\rangle=|10\rangle=\Psi_0\begin{pmatrix}\sqrt2/2\\-\sqrt2/2\end{pmatrix}$と垂直である。任意の(例えば)$|\phi\rangle=\Psi_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$に対して$|u_\perp,v_\perp\rangle=(1-P)|\phi\rangle\propto|00\rangle$

$\because \langle u|u_\perp,v_\perp\rangle=\langle u|\phi\rangle-\langle u|(P_u+P_v)|\phi\rangle$

$=\langle u|\phi\rangle-\underbrace{\langle u|P_u|\phi\rangle}_{\langle u|u\rangle\langle u|\phi\rangle = \langle u|\phi\rangle}=0$

$\langle v|u_\perp,v_\perp\rangle=0$

ここで$\langle u|u\rangle=\langle v|v\rangle=1$, $\langle u|v\rangle=0$に注意して、

$P=P_u+P_v=P^2=P^\dagger \quad P_\alpha|u_\beta\rangle=|u_\beta\rangle\delta_{\alpha\beta}\quad \alpha=u,v$

$P_u=|u\rangle\langle u|=P_u^2=P_u^\dagger \quad P|u\rangle=|u\rangle$

$P_v=|v\rangle\langle v|=P_v^2=P_v^\dagger\quad P|v\rangle=|v\rangle$

$P_uP_v=P_vP_u=0$

$$\langle u|A\rangle = \left(\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{3}, \frac{\sqrt{6}}{6}\right)\Psi_0^\dagger\Psi_0\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \left(\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{3}, \frac{\sqrt{6}}{6}\right)\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \frac{\sqrt{6}}{6}$$

$$P_u|A\rangle = |u\rangle\langle u|A\rangle = |u\rangle\frac{\sqrt{6}}{6} = \Psi_0\begin{pmatrix}1/6\\1/3\\1/6\end{pmatrix}$$

$$\langle v|A\rangle = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\Psi_0^\dagger\Psi_0\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$P_v|A\rangle = |v\rangle\langle v|A\rangle = |v\rangle\frac{\sqrt{2}}{2} = \Psi_0\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\0\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

$$|u_\perp, v_\perp\rangle = |A\rangle - P_u|A\rangle - P_v|A\rangle = \Psi_0\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\frac{1}{6}\\\frac{1}{3}\\\frac{1}{6}\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\0\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix}\right)$$

$$= \Psi_0\begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\-\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}\end{pmatrix}$$

規格化して

$$|00\rangle = |u_\perp, v_\perp\rangle\sqrt{3} = \Psi_0\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}\\-\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}$$

表2.7：$\langle j_1 m_1 j_2 m_2 | j m\rangle$; $j_1 = 1$, $j_2 = 1$, $j = 0$

j	m	m_1	m_2	$\langle j_1 m_1 j_2 m_2 \| j m\rangle$
0	0	1	-1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
0	0	0	0	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$
0	0	-1	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$