第13回

◎ 角運動量の合成

J_1とJ_2という独立、無関係の2つの角運動量の合成。

$[J_{ai}, J_{aj}] = i\hbar\epsilon_{ijk}J_{ak}$, $a=1,2$

$[J_{1i}, J_{2j}] = 0$ ：可換 ⊙ J_1とJ_2は無関係。

"$J = J_1 + J_2$" と角運動量の和を定ギ。

$\hookrightarrow [J_i, J_j] = [J_{1i}+J_{2i}, J_{1j}+J_{2j}]$

$= [J_{1i}, J_{1j}] + [J_{2i}, J_{2j}]$

$= i\hbar\epsilon_{ijk}J_{1k} + i\hbar\epsilon_{ijk}J_{2k}$

$= i\hbar\epsilon_{ijk}J_k$

$\Rightarrow$ Jも角運動量の定ギを満たす = Jも角運動量

$\Leftrightarrow$ "$\partial x + \partial y$" のようなもの!!

○ 角運動量の合成とテンソル積

、角運動量の合成のより正確な意味

角運動量1に関する演算子 A_1, B_1，角運動量2に関する演算子 A_2, B_2 に対して、テンソル積⊗とテンソル積で定義された演算子の積を次のように定ギする。

$$(A_1 \otimes A_2)(B_1 \otimes B_2) \equiv A_1B_1 \otimes A_2B_2$$

$$\left(\left(\rightarrow (A_1 \otimes A_2)(|j_1 m_1\rangle_1 \otimes |j_2 m_2\rangle_2) = (A_1|j_1 m_1\rangle_1) \otimes (A_2|j_2 m_2\rangle_2) \right)\right)$$

No.

Date

合成角運動量 J は次のように書ける。

$$J = J_1 + J_2 = \underbrace{J_1 \otimes 1_2}_{} + 1_1 \otimes J_2$$

J_1 を "2" という空間の単位演算子を使ってテンソル積で"大きな世界"の演算子として拡張

$[J_{1i}, J_{2j}] = 0$ は次のように書ける。

この2つは同じ世界に作用する演算子となる。

$$[J_{1i} \otimes 1_2, 1_1 \otimes J_{2j}]$$

$$= (J_{1i} \otimes 1_2)(1_1 \otimes J_{2j}) - (1_1 \otimes J_{2j})(J_{1i} \otimes 1_2)$$

$$= J_{1i} 1_1 \otimes 1_2 J_{2j} - 1_1 J_{1i} \otimes J_{2j} 1_2$$

$$= J_{1i} \otimes J_{2j} - J_{1i} \otimes J_{2j}$$

$$= 0$$

同様に、$[1_1 \otimes J_{2i}, J_{1j} \otimes 1_2] = 0$

また、

$$[J_{1i} \otimes 1_2, J_{1j} \otimes 1_2] = J_{1i} J_{1j} \otimes 1_2 - J_{1j} J_{1i} \otimes 1_2$$

$$= [J_{1i}, J_{1j}] \otimes 1_2 = i\hbar \epsilon_{ijk} J_{1k} \otimes 1_2$$

$$[1_1 \otimes J_{2i}, 1_1 \otimes J_{2j}] = i\hbar \epsilon_{ijk} 1_1 \otimes J_{2k}$$

から、J も角運動量の交換関係満たすことがわかる。

Date

・角運動量の固有状態

$$\begin{cases} J_1^2 |j_1 m_1\rangle_1 = \hbar^2 j_1(j_1+1)|j_1 m_1\rangle_1 \\ J_{1z}|j_1 m_1\rangle_1 = \hbar m_1 |j_1 m_1\rangle_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} J_2^2 |j_2 m_2\rangle = \hbar^2 j_2(j_2+1)|j_2 m_2\rangle_2 \\ J_{2z}|j_2 m_2\rangle_2 = \hbar m_2 |j_2 m_2\rangle_2 \end{cases}$$

$\Rightarrow J = J_1 + J_2$ が作用する状態は、次のように定義される。

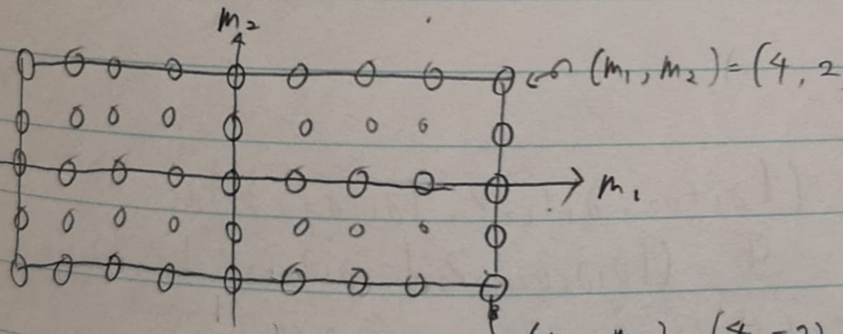
$|j_1 m_1 j_2 m_2\rangle = |j_1 m_1\rangle_1 |j_2 m_2\rangle_2 \equiv |j_1 m_1\rangle_1 \otimes |j_2 m_2\rangle_2$ ：新しい状態

この状態に、演算子 $A_1 \otimes A_2$ は次のように作用する

$(A_1 \otimes A_2)|j_1 m_1 j_2 m_2\rangle = A_1 |j_1 m_1\rangle_1 \otimes A_2 |j_2 m_2\rangle_2$

…このような状態は何個あるか？！

例) j_1, m_1 : $-j_1 \le m_1 \le j_1$



$\Rightarrow -4 \le m_1 \le 4 \cdots j_1 = 4$, $-2 \le m_2 \le 2 \cdots j_2 = 2$

個数は $(2\times 2+1)\times(4\times 2+1) = 5\times 9 = 45$ 子！

一般化すると

$$N_{j_1, j_2} = (2j_1+1)(2j_2+1) \text{ 個}$$

○ クレブシュゴルダン係数の性質

一般論に従えば、$J = J_1 + J_2$ は、

$$\begin{cases} J^2 |jm\rangle = \hbar^2 j(j+1)|jm\rangle \\ J_z |jm\rangle = \hbar m |jm\rangle \end{cases}$$

となる $|jm\rangle$ が存在する。これと $|j_1 m_1 j_2 m_2\rangle$ の間の線形関係を、
重複添字は和をとるアインシュタインの記法を用いて

$$|jm\rangle = |j_1 m_1 j_2 m_2\rangle C_{m_1 m_2, jm} \left(= \sum_{m_1, m_2} |j_1 m_1 j_2 m_2\rangle C_{m_1 m_2, jm}\right)$$

と書く。左から $\langle j_1 m_1' j_2 m_2'|$ をかけて、$|j_1 m_1 j_2 m_2\rangle$ が規格直交系と仮定すると

$$\langle j_1 m_1 j_2 m_2 | jm\rangle = C_{m_1 m_2, jm}$$

：この係数を"クレブシュ・ゴルダン係数"という

あとでわかる「規格直交化された $|jm\rangle$ の個数は $|j_1 m_1 j_2 m_2\rangle$ と同じで
N_{j_1, j_2} 個となり $|jm\rangle$ は N_{j_1, j_2} 個独立に作れる」ということを認めると
これは行列形式となり、

$$\Psi = \Phi \mathbb{C}$$

ここで、$(\Psi)_{jm} = |jm\rangle$ … $\Psi = (|j_1+j_2, j_1+j_2\rangle, |j_1+j_2, j_1+j_2-1\rangle, \cdots)$
$(\Phi)_{m_1 m_2} = |j_1 m_1 j_2 m_2\rangle$ … $\Phi = (|j_1 j_1 j_2 j_2\rangle, |j_1 j_1 j_2 j_2 - 1\rangle, |j_1 j_1 j_2 j_2 - 2\rangle, \cdots)$
となり、Ψ, Φ は固有状態を N_{j_1, j_2} 個並べた行ベクトル。
C は $N_{j_1, j_2} \times N_{j_1, j_2}$ の正方行列となる。

・クレブシュ・ゴルダン係数の直交性

$|j_1 m_1 j_2 m_2\rangle$ の直交性 ： $\Phi^\dagger \Phi = E_{N_{j_1, j_2}}$ $\left(\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \langle j_1 j_1 j_2 j_2| \\ \vdots \end{pmatrix} (|j_1 j_1 j_2 j_2\rangle \cdots) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$
$|jm\rangle$ の直交性 ： $\Psi^\dagger \Psi = E_{N_{j_1, j_2}}$

No.
Date

従って $E_{N_{j_1, j_2}} = \Phi^\dagger \Phi = \mathbb{C}^\dagger \Phi^\dagger \Phi \mathbb{C} = \mathbb{C}^\dagger \mathbb{C}$

→ $\mathbb{C}$はユニタリ

よって、$(\mathbb{C}^\dagger)_{jm, m_1 m_2} \equiv \langle jm | j_1 m_1 j_2 m_2 \rangle = \langle j_1 m_1 j_2 m_2 | jm \rangle^*$

として

$$\mathbb{C}^\dagger \mathbb{C} = \langle jm | j_1 m_1 j_2 m_2 \rangle \langle j_1 m_1 j_2 m_2 | j' m' \rangle = E_{N_{j_1, j_2}}$$
$$= \delta_{jj'} \delta_{mm'}$$

また $\mathbb{C}^\dagger = \mathbb{C}^{-1}$ なので $\mathbb{C}\mathbb{C}^\dagger = E_{N_{j_1, j_2}}$ となり

$$\mathbb{C}\mathbb{C}^\dagger = \langle j_1 m_1 j_2 m_2 | jm \rangle \langle jm | j_1 m_1' j_2 m_2' \rangle = \delta_{m_1 m_1'} \delta_{m_2 m_2'}$$

となる

→ <u>2種類の直交関係</u>

以下 $|jm\rangle$ (角運動量の和 $J = J_1 + J_2$ の固有状態)を具体的に構成することを考える。

$$J_z |jm\rangle = \hbar m |jm\rangle$$

$$(J_{1z} + J_{2z}) |j_1 m_1 j_2 m_2\rangle \langle j_1 m_1 j_2 m_2 | jm \rangle$$

$$= \hbar (m_1' + m_2') |j_1 m_1' j_2 m_2'\rangle \langle j_1 m_1' j_2 m_2' | jm \rangle$$

から $\langle j_1 m_1 j_2 m_2 |$ として m_1', m_2' について和をとると

$$\hbar m \langle j_1 m_1 j_2 m_2 | jm \rangle = \hbar (m_1' + m_2') \langle j_1 m_1 j_2 m_2 | j_1 m_1' j_2 m_2' \rangle \langle j_1 m_1' j_2 m_2' | jm \rangle$$
$$= \hbar (m_1 + m_2) \langle j_1 m_1 j_2 m_2 | jm \rangle$$

No.

Date

∴ $(m_1+m_2-m)\langle j_1 m_1 j_2 m_2 | j m\rangle = 0$

$\to \langle j_1 m_1 j_2 m_2 | j m\rangle = 0$, if $m \neq m_1+m_2$ //

(言いかえると $m=m_1+m_2$ のときのみ $\langle j_1 m_1 j_2 m_2 | j m\rangle \neq 0$.)

○ 許される全角運動量

• $j_1 \geq j_2$ として　　$m_1+m_2 = j_1+j_2$
のときで考えると、この状態は $|j_1 j_1 j_2 j_2\rangle$ … $(m_1, m_2) = (j_1, j_2)$
$\to$ ここから $J_+ = J_{1+} + J_{2+}$ を増やして新しい状態は構成できないので

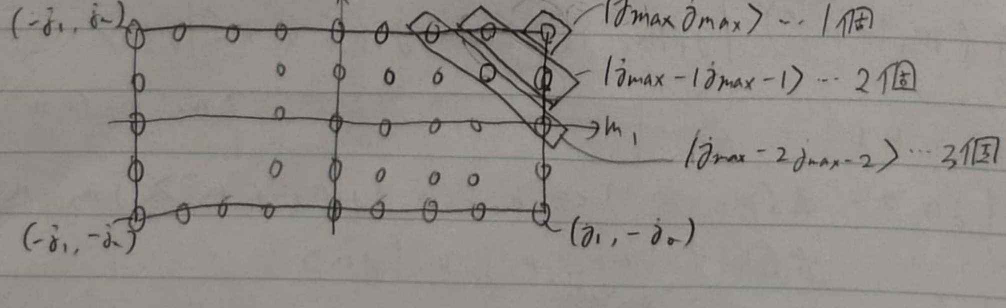
$|j_1 j_1 j_2 j_2\rangle = |j_{max} j_{max}\rangle$, $j_{max} = j_1+j_2$

であり、これに繰り返し J_- を作用させることで $|j_{max}\ m\rangle$, $m=-j_{max}, \cdots, j_{max}$
という $2j_{max}+1$ 個の状態が構成できる。

• $m_1+m_2 = j_1+j_2-1 = j_{max}-1$
のとき この状態は $(m_1, m_2) = (j_1-1, j_2)$, (j_1, j_2-1)
の中で 1つは $j = j_{max} = j_1+j_2$ の状態として使われているので それと直交する
状態が1つあり それが

$|j_{max}-1\ \ j_{max}-1\rangle$

となる

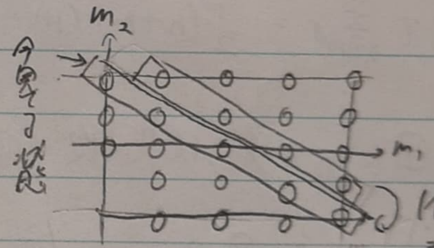


No.

Date . .

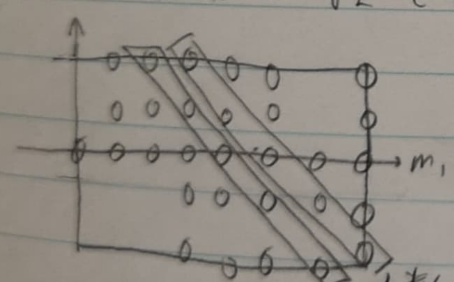
・ $m_1 + m_2 = j_1 + j_2 - 2$
の状態は $(m_1, m_2) = (j_1 - 2, j_2), (j_1 - 1, j_2 - 1), (j_1, j_2 - 2)$
から構成される
このためには "$j_2 - 2 \geq -j_2$" が必要。
↳この「2個で打ち止めにならない条件」
：新しい状態が現れる条件
∵ J_- をくり返し作用させることで新しい状態が構成
→ $2(j_{max} - 2) + 1$ 個

・ $m_1 + m_2 = j_1 + j_2 - s$
の状態で、新しい $j = j_1 + j_2 - s$ である状態が現れるためには
$$j_2 - s \geq -j_2$$
が必要となる。
よって $j = j_1 + j_2 - s \geq j_1 - j_2$



$(m_1, m_2) = (j_1 - s, j_2), \cdots, (j_1, j_2 - s)$
これができるための条件が左のやつ

※もし $j_2 - s \geq -j_2$ でないと



数増えない=新しい状態はできない。

つまり可能な j の値としては
$$j = j_1 + j_2, \cdots, j_1 - j_2 \quad ? \quad j_1 - j_2$$
一般には $j = j_1 + j_2, \cdots, |j_1 - j_2|$

No.

Date

状態数は、$j_< = |j_1 - j_2|$, $j_> = j_1 + j_2$

$$\sum_{j=j_<}^{j_>}(2j+1) = 2\cdot\frac{1}{2}(j_< + j_>)(j_> - j_< + 1) + (j_> - j_< + 1)$$

$$= (j_> + j_< + 1)(j_> - j_< + 1)$$

$$= (2j_1 + 1)(2j_2 + 1)$$

① $\sum_{j=j_<}^{j_>} j$ について 一般に最小値 n, 最大値 m の和 $\sum_{j=n}^{m} j$ を考えると

$$2\times\sum_{j=n}^{m} j = (n + n+1 + \cdots + m) + (m + m-1 + \cdots + n)$$

$$\begin{array}{r} n + n+1 + \cdots + m \\ +)\ m + m-1 + \cdots + n \\ \hline (n+m) + (n+m) + \cdots + (n+m) \end{array} = (n+m)\times(m-n+1)$$

より $\sum_{j=n}^{m} j = \frac{1}{2}(n+m)(m-n+1)$

となり 図に示す全状態数(格子点の数)と整合的。

これを

$$j_1 \otimes j_2 = |j_1 - j_2| \oplus |j_1 - j_2| + 1 \oplus \cdots \oplus j_1 + j_2$$

と表そう!

○ 状態数の数え上げ(具体例)

公式 $j_1 \otimes j_2 = j_1 + j_2 \oplus j_1 + j_2 - 1 \oplus \cdots \oplus |j_1 - j_2|$

例1 $\frac{1}{2}\otimes\frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)\oplus\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right) = 1 \oplus 0$

状態数は $(2j_1+1)(2j_2+1)$ より

(左辺) $= \left(2\cdot\frac{1}{2}+1\right)\cdot\left(2\cdot\frac{1}{2}+1\right) = 2\cdot 2 = 4$

(右辺) $= (2\cdot 1 + 1) + (2\cdot 0 + 1) = 3 + 1 = 4$ //

例2 $1\otimes\frac{1}{2} = \left(1+\frac{1}{2}\right)\oplus\left(1-\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2}\oplus\frac{1}{2}$.

状態数目

(左辺) $= (2\cdot 1+1)\cdot\left(2\cdot\frac{1}{2}+1\right) = 3\times 2 = 6$.

(右辺) $= \left(2\cdot\frac{3}{2}+1\right)+\left(2\cdot\frac{1}{2}+1\right) = 4+2 = 6$

例3 $1\otimes 1 = 2\oplus 1\oplus 0$.

状態数目

(左辺) $= (2\cdot 1+1)(2\cdot 1+1) = 3\times 3 = 9$

(右辺) $= (2\cdot 2+1)+(2\cdot 1+1)+(2\cdot 0+1) = 5+3+1 = 9$

例4 $\frac{1}{2}\otimes\frac{1}{2}\otimes\frac{1}{2} = (1\oplus 0)\otimes\frac{1}{2} = 1\otimes\frac{1}{2} + 0\otimes\frac{1}{2} = \frac{3}{2}\oplus\frac{1}{2}\oplus\frac{1}{2}$.

状態数目

(左辺) $= 2\times 2\times 2 = 8$

(右辺) $= \left(2\cdot\frac{3}{2}+1\right) + 2\cdot\left(2\cdot\frac{1}{2}+1\right) = 4+2\cdot 2 = 8$

例5 $\frac{1}{2}\otimes\frac{1}{2}\otimes\frac{1}{2}\otimes\frac{1}{2} = \left(\frac{3}{2}\oplus\frac{1}{2}\oplus\frac{1}{2}\right)\otimes\frac{1}{2}$

$= \frac{3}{2}\otimes\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\otimes\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\otimes\frac{1}{2}$

$= 2\oplus 1\oplus (1\oplus 0)\oplus (1\oplus 0)$

$= 2\oplus 1\oplus 1\oplus 1 + 0\oplus 0$.

状態数目

(左辺) $= 2\times 2\times 2\times 2 = 16$

(右辺) $= (2\cdot 2+1) + 3\cdot(2\cdot 1+1) + 2\,(2\cdot 0+1)$

$= 5 + 3\cdot 3 + 2 = 16$