2018108341

量子力学3 第13回

相原 大地

角運動量の合成

$\vec{J}_1, \vec{J}_2$ という2つの角運動量(無関係)の合成

$[J_{ai}, J_{aj}] = i\hbar\epsilon_{ijk} J_{ak} \quad a=1,2$

$[J_{1i}, J_{2j}] = 0$

角運動量の和

$\vec{J} = \vec{J}_1 + \vec{J}_2$

$$[J_i, J_j] = [J_{1i}+J_{2i}, J_{1j}+J_{2j}] = [J_{1i}, J_{1j}] + [J_{2i}, J_{2j}]$$
$$= i\hbar\epsilon_{ijk} J_{1k} + i\hbar\epsilon_{ijk} J_{2k}$$
$$= i\hbar\epsilon_{ijk}(J_{1k}+J_{2k}) = i\hbar\epsilon_{ijk} J_k$$

角運動量の合成のより正確な意味

より正確には角運動量1に関する演算子A_1, B_1, 角運動量2に関する演算子A_2, B_2に対してテンソル積$\otimes$を用いて

$$A_1 \otimes A_2 \ |j_1\ m_1\rangle_1 \otimes |j_2\ m_2\rangle_2$$
$$\|$$
$$(A_1|j_1\ m_1\rangle_1) \otimes (A_2|j_2\ m_2\rangle_2)$$

$$(A_1 \otimes A_2)(B_1 \otimes B_2) = A_1B_1 \otimes A_2B_2$$

合成角運動量$\vec{J}$は

$$\vec{J} = \vec{J}_1 + \vec{J}_2 = \vec{J}_1 \otimes 1_2 + 1_1 \otimes \vec{J}_2$$

たとえば$[J_{1i}, J_{2j}]=0$は次のような計算になる

$$[J_{1i}\otimes 1_2,\ 1_1 \otimes J_{2j}] = \underset{J_{1i}}{\underbrace{J_{1i}1_1}} \otimes \underset{J_{2j}}{\underbrace{1_2 J_{2j}}} - \underset{J_{1i}}{\underbrace{1_1 J_{1i}}} \otimes \underset{J_{2j}}{\underbrace{J_{2j} 1_2}} = 0$$

同様に$[1_1 \otimes J_{2i}, J_{1j} \otimes 1_2] = 0$である。また、

$$[J_{1i}\otimes 1_2, J_{1j}\otimes 1_2] = J_{1i}J_{1j}\otimes 1_2 - J_{1j}J_{1i}\otimes 1_2 = [J_{1i}, J_{1j}]\otimes 1_2$$
$$= i\hbar\epsilon_{ijk} J_{1k} \otimes 1_2$$

$$[1_1 \otimes J_{2i},\ 1_1 \otimes J_{2j}] = i\hbar\epsilon_{ijk} 1_1 \otimes J_{2k}$$

から、$\vec{J}$も角運動量の交換関係を満たすことが分かる。

角運動量の固有状態

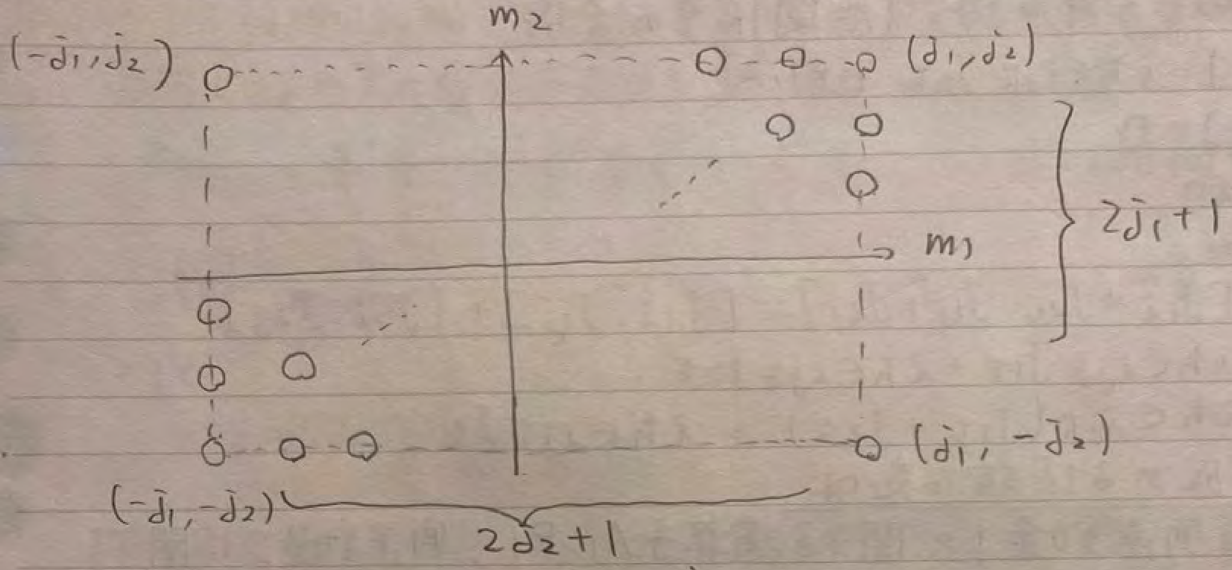
$\vec{J}_1^2 |j_1\ m_1\rangle_1 = \hbar^2 j_1(j_1+1)|j_1\ m_1\rangle_1 \qquad \vec{J}_2^2 |j_2\ m_2\rangle_2 = \hbar^2 j_2(j_2+1)|j_2\ m_2\rangle_2$

$J_{1z}|j_1\ m_1\rangle_1 = \hbar m_1 |j_1\ m_1\rangle_1 \qquad J_{2z}|j_2\ m_2\rangle_2 = \hbar m_2 |j_2\ m_2\rangle_2$

これから$\vec{J}$が作用する状態を次のようにつくる

$|j_1 m_1 j_2 m_2\rangle = |j_1\ m_1\rangle_1 |j_2\ m_2\rangle_2 \equiv |j_1\ m_1\rangle_1 \otimes |j_2\ m_2\rangle_2$ 新しい状態

$$(A_1 \otimes A_2)|j_1 m_1 j_2 m_2\rangle = A_1|j_1 m_1\rangle_1 \otimes A_2|j_2 m_2\rangle_2$$



$N_{j_1,j_2} = (2j_1+1)(2j_2+1)$ 個

一方、一般論に従えば

$\hat{J}^2|j\,m\rangle = \hbar^2 j(j+1)|j\,m\rangle$　　$|j\,m\rangle$=規格直交系

$J_z|j\,m\rangle = m\hbar\,|j\,m\rangle$

となる$|j\,m\rangle$が存在する。この間の線形関係を

$|j\,m\rangle = |j_1 m_1 j_2 m_2\rangle C_{m_1 m_2, jm}$ 和をとる$\left(\sum_{m_1,m_2}\right)$　　$|j_1 m_1 j_2 m_2\rangle$=規格直交系

左から$\langle j_1 m_1' j_2 m_2'|$をかけて、

$\langle j_1 m_1 j_2 m_2|j\,m\rangle = C_{m_1 m_2, jm}$

この係数$C_{m_1 m_2, jm}$がクレブシュ・ゴルダン係数である。
後述の手法で規格直交化された$|j\,m\rangle$が$|j_1 m_1 j_2 m_2\rangle$と同じN_{j_1,j_2}個独立に作れることを認めれば、これは行列形式で、

$\Phi = \Psi\,\mathbb{C}$

と書ける。ここで次の記法を用いた

$(\Phi)_{jm} = |j\,m\rangle$, $(\Psi)_{m_1 m_2} = |j_1 m_1 j_2 m_2\rangle$, $\mathbb{C}_{m_1 m_2, jm} = \langle j_1 m_1 j_2 m_2|j\,m\rangle$

Φ, Ψは固有状態をN_{j_1,j_2}個ならべた行ベクトルであり、$\mathbb{C}$は$N_{j_1 j_2}\times N_{j_1 j_2}$の正方行列

$\Phi = (|j_1+j_2, j_1+j_2\rangle, |j_1+j_2, j_1+j_2-1\rangle, \cdots)$=状態をならべた行ベクトル

$\Psi = (|j_1 j_1, j_2 j_2\rangle, |j_1 j_1, j_2 j_2-1\rangle, |j_1 j_1, j_2 j_2-2\rangle, \cdots)$ 〃

$\mathbb{C} = N_{j_1 j_2}\times N_{j_1 j_2}$=正方行列

Clebsch-Gordan 係数の直交性

$$\begin{pmatrix} \langle j_1 j_2 j_1 j_2 | \\ \vdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} | j_1 j_2 j_1 j_2 \rangle & \cdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & \ddots \end{pmatrix}$$

ここで $|j_1 m_1 j_2 m_2\rangle$ の規格直交性は $\psi^\dagger \psi = E_{N_{j_1 j_2}}$ と表せ，
同様に $|j\,m\rangle$ の規格直交性も $\Phi^\dagger \Phi = E_{N_{j_1 j_2}}$ と書けるから，

$$E_{N_{j_1 j_2}} = \Phi^\dagger \Phi = C^\dagger \psi^\dagger \psi C = C^\dagger C \quad \therefore C : \text{unitary}$$

$$\therefore (C^\dagger)_{jm, m_1 m_2} \equiv \langle j\,m | j_1 m_1 j_2 m_2 \rangle = \langle j_1 m_1 j_2 m_2 | j\,m \rangle^*$$

として，

$$\langle j\,m | j_1 \underbrace{m_1 j_2 m_2 \rangle \langle j_1 m_1 j_2}_{} \overbrace{m_2}^{和} | j' m' \rangle = \delta_{jj'} \delta_{mm'}$$

また，$C^\dagger = C^{-1}$ だから，$CC^\dagger = E_{N_{j_1 j_2}}$ となり，これを成分で書けば，

$$\langle j_1 m_1 j_2 m_2 | j\,m \rangle \langle j\,m | j_1 m_1' j_2 m_2' \rangle = \delta_{m_1 m_1'} \delta_{m_2 m_2'}$$

となる。(2種類の直交関係)

以下，$|j\,m\rangle$ を具体的に構成することを考える。まず，

$$\begin{aligned} J_z |j\,m\rangle &= \hbar m |j\,m\rangle \\ &= (J_{1z} + J_{2z}) |j_1 m_1 j_2 m_2\rangle \langle j_1 m_1 j_2 m_2 | j\,m\rangle \\ &= \hbar (m_1' + m_2') |j_1 m_1' j_2 m_2'\rangle \langle j_1 m_1' j_2 m_2' | j\,m\rangle \end{aligned}$$

左辺から $\langle j_1 m_1 j_2 m_2|$ をかけると

$$\begin{aligned} \hbar m \langle j_1 m_1 j_2 m_2 | j\,m\rangle &= \hbar (m_1' + m_2') \langle j_1 m_1 j_2 m_2 | j_1 m_1' j_2 m_2' \rangle \langle j_1 m_1' j_2 m_2' | j\,m \rangle \\ &= \hbar (m_1 + m_2) \langle j_1 m_1 j_2 m_2 | j\,m \rangle \end{aligned}$$

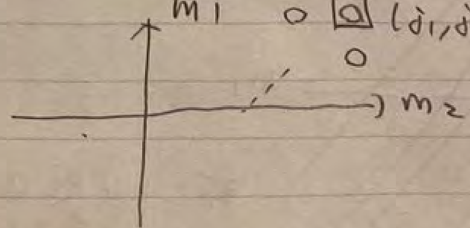
$$\therefore (m_1 + m_2 - m) \langle j_1 m_1 j_2 m_2 | j\,m \rangle = 0$$

$\langle j_1 m_1 j_2 m_2 | j\,m \rangle = 0 \quad$: if $m \neq m_1 + m_2$

* $m = m_1 + m_2$ のときのみ $\langle j_1 m_1 j_2 m_2 | j\,m \rangle \neq 0$

$j_1 \geq j_2$ として $\quad m_1 + m_2 = j_1 + j_2$

この状態 $|j_1 j_1 j_2 j_2\rangle$ から J_+ を作用させて新しい状態をつくれないので，これは $|j_{max}\, j_{max}\rangle$，$j_{max} = j_1 + j_2$ であり，これに繰り返し J_- を作用させることで $|j_{max}\, m\rangle$，$m = -j_{max}, \cdots, j_{max}$ の $2j_{max} + 1$ 個の状態が構成できる。

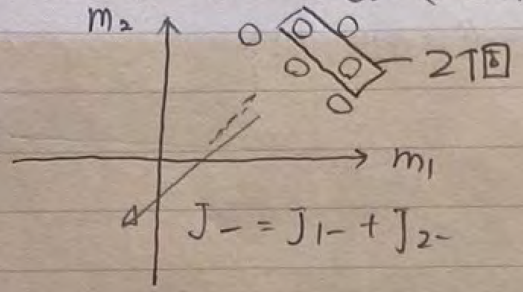


(j_1, j_2) 1個

続いて、 $m_1+m_2=j_1+j_2-1=j_{max}-1$

の状態は $(m_1, m_2)=(j_1-1, j_2), (j_1, j_2-1)$

の中で1つは $j=j_{max}=j_1+j_2$ の状態として使われているので、それと直交する状態が一つあり、それが $|j_{max}-1\ j_{max}-1\rangle$ となる

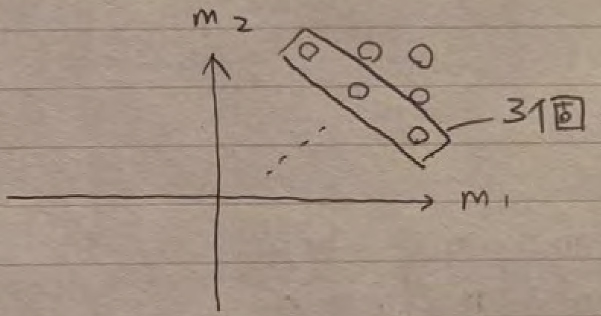


$2(j_{max}-1)+1$ 個できる

続いて $m_1+m_2=j_1+j_2-2$

の状態は、$(m_1, m_2)=(j_1-2, j_2), (j_1-1, j_2-1), (j_1, j_2-2)$

から構成されるが、そのためには $j_2-2\geq -j_2$ が必要



2個で打ち止めにならない条件

：新しい状態が存在する条件

$|j_{max}-2, j_{max}-2\rangle$

↑

J_- をくり返し作用

$2(j_{max}-2)+1$ 個できる

続いて $m_1+m_2=j_1+j_2-S$

の状態で新しい $j=j_1+j_2-S$ である状態が現れるためには、

$j_2-S\geq -j_2$

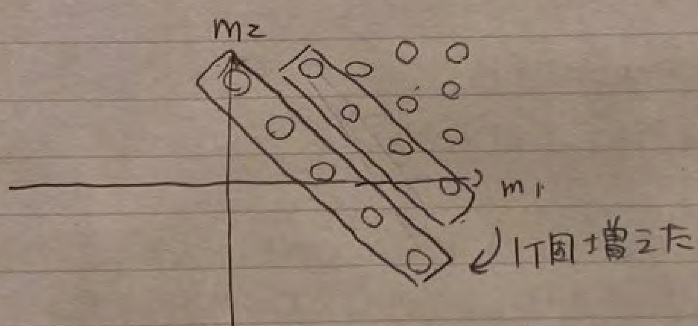
が必要である。よって、 $j=j_1+j_2-S\geq j_1-j_2$

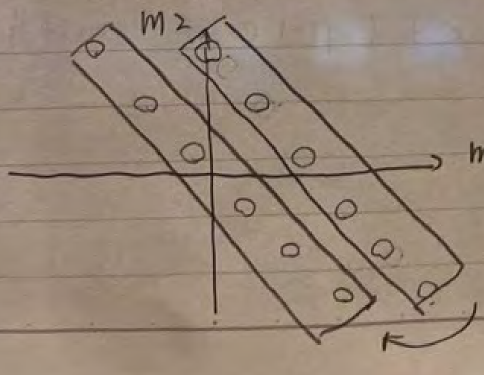
つまり可能な j の値としては

$j=j_1+j_2, \cdots, j_1-j_2$

一般には

$j=j_1+j_2, \cdots, |j_1-j_2|$





新しい状態は出ない

もう増えない

状態数を数えれば、$j_< = |j_1 - j_2|$, $j_> = j_1 + j_2$ として

$$\sum_{j=j_<}^{j_>}(2j+1) = 2\,\frac{1}{2}(j_< + j_> +)(j_> - j_< + 1) + (j_> - j_< + 1)$$

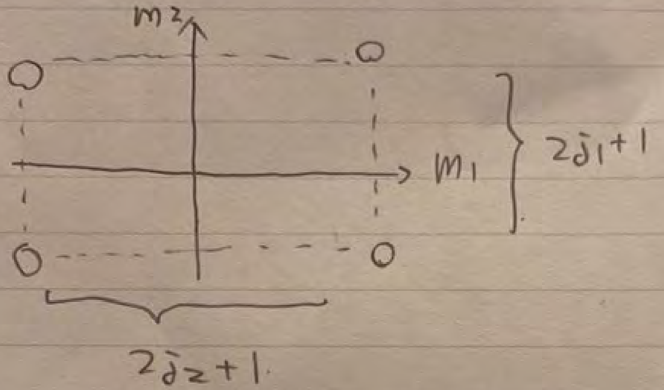
$$= (j_> + j_< + 1)(j_> - j_< + 1)$$

$$= (2j_1 + 1)(2j_2 + 1)$$

$$\begin{array}{r} n + n+1 + \cdots + m \\ +)\ m + m-1 + \cdots + n \\ \hline \underbrace{n+m, \cdots}_{m-n+1コ} \end{array}$$

$j_> + j_< = j_1 + j_2 + j_1 - j_2 = 2j_1$.

$j_> - j_< = j_1 + j_2 - (j_1 - j_2) = 2j_2$.



これを $j_1 \otimes j_2 = |j_1 - j_2| \oplus |j_1 - j_2| + 1 \oplus \cdots \oplus j_1 + j_2$
と表す。

$j_1 \otimes j_2 = j_1 + j_2 \oplus j_1 + j_2 - 1 \oplus \cdots \oplus |j_1 - j_2|$

例1 $\frac{1}{2} \otimes \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) \oplus \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) = 1 \oplus 0$

状態数は左辺 $\left(2\cdot\frac{1}{2}+1\right)\left(2\cdot\frac{1}{2}+1\right) = 2\times 2 = 4$

右辺 $(2\cdot1+1) + (2\cdot0+1) = 3 + 1 = 4$ ok

例2 $1 \otimes \frac{1}{2} = \left(1+\frac{1}{2}\right) \oplus \left(1-\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2} \oplus \frac{1}{2}$

左辺 $(2\cdot1+1)\left(2\cdot\frac{1}{2}+1\right) = 3\times2 = 6$

右辺 $\left(2\cdot\frac{3}{2}+1\right) + \left(2\cdot\frac{1}{2}+1\right) = 4 + 2 = 6$ ok

例3 $1 \otimes 1 = 2 \oplus 1 \oplus 0$

左辺 $(2\cdot1+1)(2\cdot1+1) = 3\times3 = 9$

右辺 $(2\cdot2+1) + (2\cdot1+1) + (2\cdot0+1) = 5 + 3 + 1 = 9$ ok

例4 $\frac{1}{2} \otimes \frac{1}{2} \otimes \frac{1}{2} = (1 \oplus 0) \otimes \frac{1}{2} = 1 \otimes \frac{1}{2} \oplus 0 \otimes \frac{1}{2}$

$= \frac{3}{2} \oplus \frac{1}{2} \oplus \frac{1}{2}$

左辺 $2\times2\times2 = 8$

右辺 $\left(2\cdot\frac{3}{2}+1\right) + \left(2\cdot\frac{1}{2}+1\right) + \left(2\cdot\frac{1}{2}+1\right) = 4 + 2 + 2 = 8$ ok

例5 $\frac{1}{2} \otimes \frac{1}{2} \otimes \frac{1}{2} \otimes \frac{1}{2} = \left(\frac{3}{2} \oplus \frac{1}{2} \oplus \frac{1}{2}\right) \otimes \frac{1}{2}$

$= \frac{3}{2} \otimes \frac{1}{2} \oplus \frac{1}{2} \otimes \frac{1}{2} \oplus \frac{1}{2} \otimes \frac{1}{2}$

$= 2 \oplus 1 \oplus (1 \oplus 0) \oplus (1 \oplus 0) = 2 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 0$

左辺 $2^4 = 16$

右辺 $(2\cdot2+1) + 3\cdot(2\cdot1+1) + 2\cdot(0\cdot1+1) = 5 + 9 + 2 = 16$ ok