

# 量子力学3 第11回議義まとめ

201810855

佐藤 綾香

★ 一様磁場下の電子系の電子状態 (ランダウ準位)  
 $A^2$  を無視しないで、強磁場にも適用可能な議論を行う。

「二次元」電子がある平面内に閉じ込められていると  
 仮定し、平面内からは外に出ることはできない。



$$H = \frac{1}{2m} (P - eA)^2$$

$$= \frac{1}{2m} \pi^2$$

$$\pi = p - eA \sim m v$$

dynamical momentum (古典的には)

「二次元」では  $x, y$  平面内のみ電子は運動のみ。

↓  
 $(\pi_x, \pi_y)$  のみ考える。

$$H = \frac{1}{2m} (\pi_x^2 + \pi_y^2)$$

3つの1-ベル賞  
 “量子ホール効果”

$$\pi_x = p_x - eAx = \pi_x^+$$

$$\pi_y = p_y - eAy = \pi_y^+$$

$$B = \partial_x A_y - \partial_y A_x$$

$$p_{x,y} = -i\hbar \partial_{x,y}$$

$$[\pi_x, \pi_y] = [-i\hbar \partial_x - eAx, -i\hbar \partial_y - eAy]$$

$$= [-i\hbar \partial_x, -eAy] + [-eAx, -i\hbar \partial_y]$$

$$= -i\hbar (-e) \{ \partial_x (Ay) - Ay \partial_x \} + (-e) (-i\hbar) \{ Ax \partial_y - \partial_y (Ax) \}$$

$$= i e \hbar (\partial_x A_y - \partial_y A_x)$$

$$= i e \hbar B \quad (eB > 0 \text{ とする})$$

$$\left[ \frac{1}{\sqrt{\hbar B}} \pi_x, \frac{1}{\sqrt{\hbar B}} \pi_y \right] = i$$

∴  $\frac{1}{\sqrt{\hbar B}} \pi_{x,y} \sim$  無次元,  $\pi_{x,y}$ : 運動量  $\hbar/\text{長}$

$\sqrt{\hbar B} \equiv \frac{\hbar}{l_B}$  とし “磁気長”  $l_B$  を定義する。

$$l_B = \sqrt{\frac{\hbar}{eB}} \quad (eB > 0)$$

$$\left[ \frac{l_B}{\hbar} \pi_x, \frac{l_B}{\hbar} \pi_y \right] = i$$

$$\begin{cases} a \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{l_B}{\hbar} (\pi_x + i\pi_y) & \text{とめると} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^\dagger \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{l_B}{\hbar} (\pi_x - i\pi_y) \end{cases}$$

$$[a, a^\dagger] = \frac{1}{2} \left( \frac{l_B}{\hbar} \right)^2 \left( \underbrace{-i[\pi_x, \pi_y]}_{-i \left( \frac{l_B}{\hbar} \right)^2} + \underbrace{i[\pi_y, \pi_x]}_{i \left( \frac{l_B}{\hbar} \right)^2 (-i)} \right) = 1$$

逆に解いて

$$\pi_x = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \frac{\hbar}{l_B} \right) (a + a^\dagger)$$

$$\pi_y = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{i} \left( \frac{\hbar}{l_B} \right) (a - a^\dagger)$$

よって

$$H = \frac{1}{2m} (\pi_x^2 + \pi_y^2)$$

$$= \frac{1}{4m} \frac{\hbar^2}{l_B^2} \{ (a + a^\dagger)^2 - (a - a^\dagger)^2 \}$$

$$= \frac{\hbar^2}{4m} \frac{eB}{\hbar} \{ 2(a a^\dagger + a^\dagger a) \}$$

$$= \frac{1}{4} \hbar \omega_c \cdot 2(a^\dagger a + 1 + a^\dagger a) \quad \left( \omega_c = \frac{eB}{m} \right)$$

$$= \frac{1}{4} \hbar \omega_c \cdot 4(a^\dagger a + \frac{1}{2})$$

$$= \hbar \omega_c (n + \frac{1}{2}) \quad n = a^\dagger a$$

よって

$$H = \frac{1}{2} (\pi_x^2 + \pi_y^2) = \hbar \omega_c (\hat{n} + \frac{1}{2}), \quad \hat{n} = a^\dagger a, \quad [a, a^\dagger] = 1.$$

$$\omega_c = \frac{eB}{m} \quad \text{サイクロトロン振動数}$$

調和振動子

$$|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}} (a^\dagger)^n |0\rangle, \quad a|0\rangle = 0, \quad |0\rangle: \text{真空と} \text{して}$$

$$H|n\rangle = E_n |n\rangle, \quad E_n = \hbar \omega_c (n + \frac{1}{2})$$

古典的には、ローレンツ力での運動 (サイクロン運動)  
 回転の角振動数  $\omega$  とすると、

$$\text{ローレンツ力} = e v B = m r \omega^2 = \text{遠心力}$$

$$v = r \omega \quad \begin{cases} e r \omega B = m r \omega^2 \\ \omega = \frac{e B}{m} = \omega_c \end{cases}$$

2次元 - 様磁場中の電子系 = 1次元調和振動子 ?

実は  $E_n$  は縮退している。 (270度系では270度は縮退)

$\therefore H$  と可換な物理量が存在する (同時対角化可能)

$\hookrightarrow$  guiding center

$$R_x = x + \frac{e \hbar}{m c} \pi_y, \quad \pi = p + \text{定数}$$

$$[x, p_x] = i \hbar = [x, \pi_x]$$

$$[y, p_y] = i \hbar = [y, \pi_y]$$

$$[H, R_x] = \frac{1}{2m} [\pi_x^2 + \pi_y^2, x + \frac{e \hbar}{m c} \pi_y]$$

$$= \frac{1}{2m} [\pi_x^2, x] + \frac{1}{2m} \frac{e \hbar^2}{m c} [\pi_x^2, \pi_y]$$

$$= \frac{1}{2m} \left\{ \underbrace{\pi_x [\pi_x, x]}_{-i \hbar} + \underbrace{[\pi_x, x] \pi_y}_{-i \hbar} \right\} + \frac{1}{2m} \frac{e \hbar}{m c} i 2 \pi_x \frac{\hbar^2}{e \hbar^2}$$

$$= -i \frac{\hbar}{m} \pi_x + i \frac{\hbar}{m} \pi_x = 0 \quad \text{可換!}$$

$$([\pi_x, \pi_y] = i \left( \frac{\hbar}{e \hbar} \right)^2)$$

$R_x, R_y$  の方と  $H$  は同時対角化できる!

実は、 $R_y = y - \frac{e \hbar}{m c} \pi_x$  と  $[H, R_y] = 0$  と可換で  $[R_x, R_y] \neq 0$

ランダウ縮退

ゲージを固定して、具体的に考える

ランダウゲージ

$$A = \begin{pmatrix} 0 \\ Bx \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{rot} A = \begin{pmatrix} \partial_y A_z - \partial_z A_y \\ \partial_z A_x - \partial_x A_z \\ \partial_x A_y - \partial_y A_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B \end{pmatrix}$$

$$H = \frac{1}{2m} P_x^2 + \frac{1}{2m} (P_y - eBx)^2$$

$$= -\frac{\hbar^2}{2m} \partial_x^2 + \frac{1}{2m} (-i\hbar \partial_y - eBx)^2$$

$$H \Psi(x, y) = E \Psi(x, y)$$

$$\Psi(x, y) = e^{ik_y y} \cdot \psi(x) \quad \text{変数分離形}$$

$$\partial_y \sim i k_y \text{ 等}$$

$$\left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2m} (\hbar k_y - eBx)^2 \right] \psi(x) = E \psi(x)$$

$$\left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{(eB)^2}{2m} \left(x - \frac{\hbar k_y}{eB}\right)^2 \right] \psi(x) = E \psi(x)$$

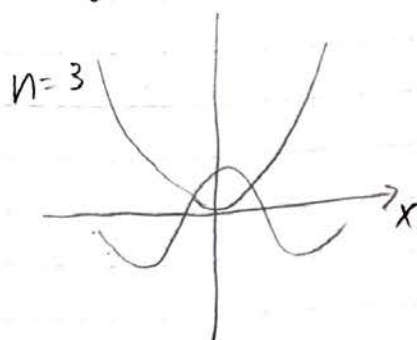
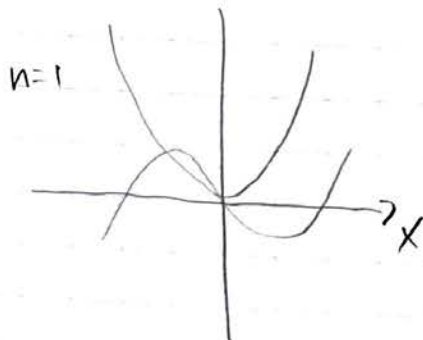
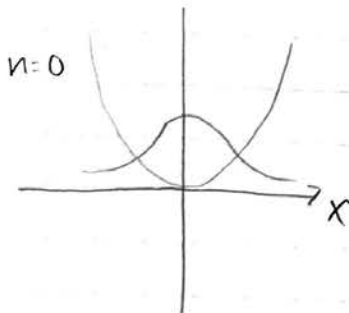
$$\frac{1}{2} m \omega^2 \text{ 等調和振動子の念頭} \rightarrow m \omega^2 = \frac{(eB)^2}{m} \rightarrow \omega = \frac{eB}{m}$$

$$X = x - \frac{\hbar k_y}{eB} = x - x_0 \quad \text{等} \quad \frac{d}{dx} = \frac{d}{dX}$$

サイクロトロンの振動数

$$\left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dX^2} + \frac{1}{2} m \omega^2 X^2 \right] \psi = E \psi$$

ポテンシャル  $\frac{1}{2} m \omega^2 X^2$  中の調和振動子  $\hbar \psi_n = E \psi_n$



$X \sim 0$  に局在した波動関数  
 $x \sim x_0 + X \quad E_n = \hbar \omega \left(n + \frac{1}{2}\right), n=0, 1, 2, \dots$

$k_y$  の方向  $\rightarrow$  縮退

全系:  $y$  方向には  $L_y$  の周期的境界条件

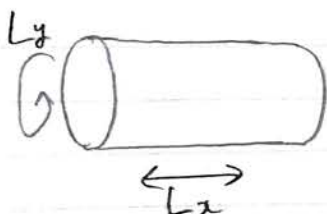
$$e^{ik_y \cdot 0} = e^{ik_y L_y}$$

$$\rightarrow k_y = \frac{2\pi}{L_y} \times m \quad m=0, \pm 1, \pm 2$$

$$\Delta k_y = \frac{2\pi}{L_y} \quad \text{"位"}=1 \text{ がある}$$

$x$  方向には

$0 \sim L_x$  の有限系



$0 < x k_y < L_x$  であるとする

$$\frac{\hbar k_y}{eB} \quad 0 < k_y < \frac{eB}{\hbar} L_x$$

$$\Delta k_y = \frac{2\pi}{L_y} \text{ だけ}$$

$$\text{許される } k_y \text{ の数 } N_D = \frac{eBL_x}{\hbar} \cdot \frac{1}{\Delta k_y}$$

$$= \frac{eBL_x L_y}{L} = \frac{\Phi}{\Phi_0} \quad \Phi_0 = \frac{h}{e} = \text{flux quantum}$$

つまり、各ランダウ準位は  $N_D$  重に縮退

$$N_D = \frac{\Phi}{\Phi_0} \quad (\Phi = BS: \text{系を囲む全磁束})$$

$$S = L_x L_y \quad \Phi_0 \text{ で割って何本あるかが } N_D!$$

② 2次元の自由粒子系の状態密度について (磁場のない場合)

$$H = \frac{p^2}{2m} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \quad \text{について } H\phi_{\mathbf{k}} = \epsilon\phi_{\mathbf{k}} \quad \phi_{\mathbf{k}} = e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} = e^{i(k_x x + k_y y)}$$

$0 \sim L_x, L_y$  の正方形について周期的境界条件

$$\epsilon \text{ が } 2\pi \text{ の整数倍になると, } e^{ik_x L} = e^{ik_y L} = 1 \Rightarrow \Delta k = \frac{2\pi}{L}$$

2次元での  $\mathbf{k}$  平面上  $(\frac{2\pi}{L})^2$  ごとに1状態

$$\epsilon = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}, \quad k^2 = k_x^2 + k_y^2 \quad \text{だからエネルギー } \epsilon \text{ 以下の状態数 } N_\epsilon \text{ として半径 } k \text{ の$$

$$N_\epsilon = \frac{\pi k^2}{(\frac{2\pi}{L})^2} = \frac{L^2}{4\pi^2} \pi k^2 = \frac{L^2}{4\pi} \frac{2m\epsilon}{\hbar^2} = L^2 \frac{m}{2\pi\hbar^2} \epsilon$$

エネルギー幅  $\delta\epsilon$  内の状態  $D(\epsilon)\delta\epsilon$  として

$$D(\epsilon) = \frac{dN_\epsilon}{d\epsilon} = L^2 \frac{m}{2\pi\hbar^2} = \text{定数}$$

$$D(\varepsilon) = S \frac{m}{2\pi\hbar^2}$$

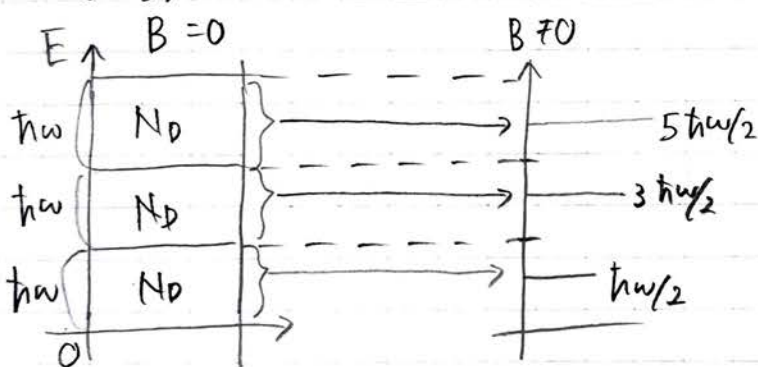
→ ランダウ準位間隔  $\Delta E = \hbar\omega = \hbar \frac{eB}{m}$  内にある状態数は

$$D_0 E = S \frac{m}{2\pi\hbar^2} \cdot \hbar \frac{eB}{m}$$

$$= SB \frac{e}{h} = \frac{\Phi}{\Phi_0}, \quad \Phi = BS, \quad \Phi_0 = \frac{h}{e}$$

=  $N_D$ : ランダウ準位の縮退度に等しい!

まとめると、



ランタウ準位間にある  $(B=0)$   
状態がランタウ準位  
[?] すべて縮退する!  
"ランタウ縮退の物理的意味"

1次元調和振動子のエルミート方程式

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 x^2, \quad [x, p] = i\hbar, \quad [a, a^\dagger] = 1.$$

$$x = A(a + a^\dagger), \quad p = B i(a - a^\dagger) \quad \text{と} \quad A, B \text{ 実}$$

$$[x, p] = iAB \{ -[a, a^\dagger] + [a^\dagger, a] \}$$

$$= -2iAB = i\hbar \quad \text{よ} \quad AB = -\frac{\hbar}{2}$$

$$H = -\frac{B^2}{2m} (a - a^\dagger)^2 + \frac{1}{2} m \omega^2 A^2 (a + a^\dagger)^2, \quad a^2, a^{\dagger 2} \text{ の項は消える}$$

$$\frac{B^2}{2m} = \frac{1}{2} m \omega^2 A^2 = \frac{1}{2} m \omega^2 \left(\frac{\hbar}{2B}\right)^2, \quad B^4 = \frac{1}{4} m^2 \omega^2 \hbar^2$$

$$B = -\frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\hbar m \omega}, \quad A = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\hbar}{m \omega}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \ell, \quad \ell = \sqrt{\frac{\hbar}{m \omega}} \quad \text{量子化長さ} \\ = -\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\hbar}{\ell}$$

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{1}{\sqrt{2}} \ell (a + a^\dagger) \\ p &= \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\hbar}{\ell} (a - a^\dagger) \end{aligned} \right\} \rightarrow \begin{aligned} a &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \frac{x}{\ell} + i \frac{\ell}{\hbar} p \right) \quad \star \\ a^\dagger &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \frac{x}{\ell} - i \frac{\ell}{\hbar} p \right) \quad \star \end{aligned}$$

$$H = -\frac{B^2}{2m} (-aa^\dagger - a^\dagger a) + \frac{1}{2} m \omega^2 A^2 (aa^\dagger + a^\dagger a)$$

$$= \frac{1}{2} m \omega^2 \frac{1}{2} \frac{\hbar}{m \omega} (2aa^\dagger + 2a^\dagger a)$$

$$= \hbar \omega (a^\dagger a + \frac{1}{2}) \quad \frac{4(a^\dagger a + \frac{1}{2})}{4(a^\dagger a + \frac{1}{2})}$$

$$= \hbar \omega (\hat{n} + \frac{1}{2}) \quad \star$$

真空  $|0\rangle$ ,  $a|0\rangle=0$  に対する波動関数  $\phi_0(x)$  とする。

$$\left(\frac{x}{l} + i\frac{l}{\hbar}p\right)\phi_0 = \left(\frac{x}{l} + i\frac{l}{\hbar}\frac{\hbar}{i}\partial_x\right)\phi_0 = \left(\frac{x}{l} + l\partial_x\right)\phi_0 = 0.$$

$$\phi_0 = C e^{-\frac{x^2}{2l^2}} \quad \because \partial_x \phi_0 = -\frac{1}{2} \frac{2x}{l^2} \phi_0 = -\frac{x}{l^2} \phi_0$$

規格化条件から.

$$\begin{aligned} 1 &= \int_{-\infty}^{\infty} dx |\phi_0|^2 = |C|^2 \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-\frac{x^2}{l^2}} & x = lt^{\frac{1}{2}} \quad dx = \frac{1}{2} lt^{-\frac{1}{2}} dt \\ &= |C|^2 \cdot 2 \int_0^{\infty} \frac{1}{2} l dt t^{-\frac{1}{2}} e^{-t} \\ &= |C|^2 l \int_0^{\infty} dt e^{-t} t^{-\frac{1}{2}} \\ &= |C|^2 \pi^{\frac{1}{2}} l \quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \quad (l = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}) \end{aligned}$$

$$\therefore C = \left(\frac{1}{l\pi}\right)^{\frac{1}{4}} = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}}$$

$|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}} (a^\dagger)^n |0\rangle$  に対する固有状態  $\phi_n(x)$  とする

$$H\phi_n = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right)\phi_n$$

$$\phi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{n!}} \frac{1}{\sqrt{l^n}} \left(\frac{x}{l} - i\frac{l}{\hbar}p\right)^n \phi_0 = C \frac{1}{\sqrt{n!} 2^{n/2}} \left(\frac{x}{l} - l\partial_x\right)^n e^{-\frac{x^2}{2l^2}}$$

$\xi = \frac{x}{l}$  とする.  $\partial_\xi = l\partial_x$ , 任意の関数  $g(\xi)$  に対して.

$$\begin{aligned} \phi_n &= C \frac{1}{2^{n/2} \sqrt{n!}} \underbrace{\left(\xi - \partial_\xi\right)^n}_{e^{\xi/2} e^{-\xi/2} (\xi - \partial_\xi) (\xi - \partial_\xi)^{n-1} e^{-\xi/2}} e^{-\xi^2/2} & e^{-\xi/2} (\xi - \partial_\xi) g &= -\partial_\xi (e^{-\xi/2} g) \\ & & e^{-\xi/2} (\xi - \partial_\xi) &= (-\partial_\xi) e^{-\xi/2} \\ & & e^{\xi/2} (-\partial_\xi) e^{-\xi/2} (\xi - \partial_\xi)^{n-1} e^{-\xi^2/2} & \\ & & e^{-\xi/2} (\xi - \partial_\xi) (\xi - \partial_\xi)^{n-2} e^{-\xi^2/2} & \end{aligned}$$

$$= C \frac{1}{2^{n/2} \sqrt{n!}} e^{\xi/2} (-\partial_\xi)^n e^{-\xi^2} \quad e^{\xi/2} (-\partial_\xi)^n e^{-\xi/2} e^{-\xi^2/2}$$

$$= C \frac{1}{2^{n/2} \sqrt{n!}} e^{-\xi^2/2} e^{\xi^2} (-\partial_\xi)^n e^{-\xi^2}$$

$$= \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} \frac{1}{2^{n/2} \sqrt{n!}} e^{-\xi^2/2} H_n(\xi)$$

99項式  $H_n(\xi)$  : エルミート99項式  
DT-1172の公式  
(エルミート99項式に関する)



規格直交性

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \phi_n^*(x) \phi_m(x) = \delta_{n,m} \quad x = l\xi = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}} \xi$$

$$\stackrel{''}{=} C^2 \frac{1}{2^n n!} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-\xi^2} H_n(\xi) H_m(\xi)$$

$$\sqrt{\frac{m\omega}{\pi\hbar}}$$

$$\text{よって} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi e^{-\xi^2} H_n(\xi) H_m(\xi) = 2^n n! \sqrt{\pi} \delta_{n,m}$$

エルミート多項式の規格直交性

まとめ①

エルミート多項式

$$H_n(\xi) = e^{\xi^2} (-2\xi)^n e^{-\xi^2} \quad \text{: 似た"1/T"λの公式}$$

$$H_0(\xi) = 1$$

$$H_1(\xi) = 2\xi$$

規格直交性  $\int_{-\infty}^{\infty} d\xi e^{-\xi^2} H_n(\xi) H_m(\xi) = \sqrt{\pi} 2^n n! \delta_{nm}$

まとめ②

1次元調和振動子

$$H = \frac{1}{2m} p^2 + \frac{1}{2} m\omega^2 x^2, \quad p = -i\hbar dx$$

$$H\phi_n(x) = E_n\phi_n(x), \quad E_n = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right)$$

$$\phi_n(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} \frac{1}{2^{n/2} n!} e^{-x^2/2l^2} H_n\left(\frac{x}{l}\right)$$

$$l = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}} \quad \text{: "量子化長"}$$