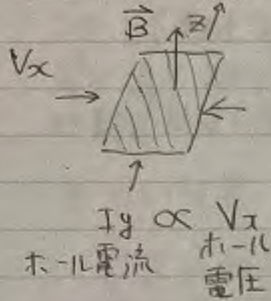


・ 一様な磁場下の電子系の電子状態 (ランダウ準位)



$$H = \frac{1}{2m} (\vec{p} - e\vec{A})^2$$

$$= \frac{1}{2m} \vec{\pi}^2$$

電子はx,y平面内のみ運動

$$\vec{\pi} = \vec{p} - e\vec{A} \sim m\vec{v} \text{ (古典的には) } = \text{dynamical momentum}$$

ホール電流 $I_y \propto V_x$ ホール電圧

2次元 $(\frac{\pi_x}{\pi_y})$ のみ考慮

$$H = \frac{1}{2m} (\pi_x^2 + \pi_y^2)$$

1985. Klaus von Klitzing

量子ホール効果の発見

ホール伝導度 $\sigma_{xy} = \frac{e^2}{h} \times 1, 2, 3, \dots$ 整数量子ホール効果
→ 標準抵抗の定義

$$I_y = \sigma_{yx} V_x$$

1998. Robert B. Laughlin

H. L. Stormer

D. C. Tsui

$\sigma_{xy} = \frac{e^2}{h} \times \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \dots$ 分数に量子化 分数量子ホール効果

① 分数統計 (fermi粒子でもbose粒子でもない) Anyon

→ 粒子のλが2で $e^{i2\pi\lambda}$ の位相 ($\sigma_{xy} = \frac{e^2}{h} \times \frac{1}{3}$ の場合)

分数電荷 $\frac{e}{3}, \frac{e}{5}$ など"も現れる

電子が"つくる電子以外の粒子

- 多体相互作用 (2-0力) が重要
- 量子液体での励起 ~ 粒子

20/6. トポロジカル相の理論的発見

D. Thouless

F. D. M. Haldane

J. M. Koslovitz

$\sigma_{xy} = \frac{e^2}{h} \times$ (整数) に量子化するのほたせ

⇒ トポロジカルな理由

トポロジカル相: 量子ホール効果がおきる物質相がその典型例

実験: I_{yy} 状態

(バルク- I_{yy} 対称)

$$H = \frac{1}{2m} (\pi_x^2 + \pi_y^2)$$

$$\pi_x = p_x - eA_x = \pi_x^\dagger \quad B = \partial_x A_y - \partial_y A_x$$

$$\pi_y = p_y - eA_y = \pi_y^\dagger \quad p_{x,y} = -i\hbar \partial_{x,y}$$

$$[\pi_x, \pi_y] = [-i\hbar \partial_x - eA_x, -i\hbar \partial_y - eA_y]$$

$$= [-i\hbar \partial_x, -eA_y] + [-eA_x, -i\hbar \partial_y]$$

$$= -i\hbar(-e)\{\partial_x(A_y \cdot) - A_y \partial_x\} + (-e)(-i\hbar)\{A_x \partial_y - \partial_y(A_x \cdot)\}$$

$$= i e \hbar (\partial_x A_y - \partial_y A_x)$$

$$= i e \hbar B \quad (eB > 0 \text{ である})$$

$$\left[\frac{1}{\sqrt{e\hbar B}} \pi_x, \frac{1}{\sqrt{e\hbar B}} \pi_y \right] = i, \quad \frac{1}{\sqrt{e\hbar B}} \pi_{x,y} \sim \text{無次元} \quad \pi_{x,y} = \text{運動量 (h/長)}$$

$$\sqrt{e\hbar B} \equiv \hbar / l_B \text{ である "磁気長" } l_B \text{ の定義}$$

$$l_B = \sqrt{\frac{\hbar}{eB}}$$

$$\left[\frac{l_B}{\hbar} \pi_x, \frac{l_B}{\hbar} \pi_y \right] = i$$

$$\begin{cases} a \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{l_B}{\hbar} (\pi_x + i\pi_y) \\ a^\dagger \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{l_B}{\hbar} (\pi_x - i\pi_y) \end{cases} \text{ である}$$

$$a^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{l_B}{\hbar} (\pi_x - i\pi_y)$$

$$[a, a^\dagger] = \frac{1}{2} \left(\frac{l_B}{\hbar} \right)^2 \left(-i[\pi_x, \pi_y] + i[\pi_y, \pi_x] \right) = 1$$

$$-i \left(\frac{l_B}{\hbar} \right)^2 i \quad i \left(\frac{l_B}{\hbar} \right)^2 (-i)$$

逆求解にて,

$$\begin{cases} \pi_x = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\hbar}{l_B} \right) (a + a^\dagger) \\ \pi_y = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\lambda} \left(\frac{\hbar}{l_B} \right) (a - a^\dagger) \end{cases} \quad [a, a^\dagger] = 1$$

$$H = \frac{1}{2m} (\pi_x^2 + \pi_y^2) = 2(a a^\dagger + a^\dagger a) = 4(a^\dagger a + \frac{1}{2})$$

$$= \frac{\hbar^2}{4m} \frac{eB}{\hbar} \left\{ (a + a^\dagger)^2 - (a - a^\dagger)^2 \right\} = \hbar \omega_c \left(n + \frac{1}{2} \right), \quad n = a^\dagger a$$

$$\frac{\hbar^2}{4m} \frac{eB}{\hbar} = \frac{1}{4} \hbar \frac{eB}{m} = \frac{1}{4} \hbar \omega_c, \quad \omega_c = \frac{eB}{m}$$

まとめ

$$H = \frac{1}{2m} (\pi_x^2 + \pi_y^2) = \hbar \omega_c (n + \frac{1}{2}), \quad n = a^\dagger a, \quad [a, a^\dagger] = 1$$

$$\omega_c = \frac{eB}{m} = \text{サイクロトロン振動数}$$

"調和振動子"

$$|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}} (a^\dagger)^n |0\rangle, \quad a|0\rangle = 0, \quad |0\rangle = \text{真空}$$

等間隔
energy 単位

$$H|n\rangle = E_n|n\rangle, \quad E_n = \hbar \omega_c (n + \frac{1}{2})$$

古典的にはローレンツ力を用運動(サイクロトロン運動)

回転の角振動数 ω とすると

$$\text{ローレンツ力} = e\mathbf{v} \times \mathbf{B} = m\mathbf{r}\omega^2 = \text{遠心力}$$

$$\mathbf{v} = r\boldsymbol{\omega} \quad \rightarrow \quad e\mathbf{v} \times \mathbf{B} = m\mathbf{r}\omega^2$$

2次元一様磁場中の電子系

$$\omega = \frac{eB}{m} = \omega_c$$

|| ?

一次元調和振動子

Landau 縮退

→ 実は E_n は系縮退している (2次元系では2次元系縮退)∴ H と可換な物理量が存在する (同時対角化可能)

"guiding center"

$$R_x = x + \frac{\ell_B^2}{\hbar} \pi_y, \quad \boldsymbol{\pi} = \mathbf{p} + \text{定数}$$

$$[x, p_x] = i\hbar = [x, \pi_x]$$

$$[y, p_y] = i\hbar = [y, \pi_y]$$

$$[H, R_x] = \frac{1}{2m} [\pi_x^2 + \pi_y^2, x + \frac{\ell_B^2}{\hbar} \pi_y]$$

$$= \frac{1}{2m} [\pi_x^2, x] + \frac{1}{2m} \frac{\ell_B^2}{\hbar} [\pi_x^2, \pi_y]$$

$$[\pi_x, \pi_y] = -\lambda \left(\frac{\hbar}{\ell_B}\right)^2$$

$$= \frac{1}{2m} \left\{ \underbrace{\pi_x [\pi_x, x]}_{-i\hbar} + \underbrace{[\pi_x, x] \pi_x}_{-i\hbar} \right\} + \frac{1}{2m} \frac{\ell_B^2}{\hbar} \cdot 2 \lambda \left(\frac{\hbar}{\ell_B}\right)^2 \pi_x$$

$$= -i \frac{\hbar}{m} \pi_x + i \frac{\hbar}{m} \pi_x = 0 \quad \therefore \text{可換}$$

実は $R_y = y - \frac{\ell_B^2}{\hbar} \pi_x$ も $[H, R_y] = 0$ と可換 ∴ $[R_x, R_y] \neq 0$ R_x, R_y の一方と H は同時対角化可能

Landau 縮退

γ=2 ε 固定して具体的に考える

Landau gauge

$$A = \begin{pmatrix} 0 \\ Bx \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{\nabla} \times \vec{A} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B \end{pmatrix}$$

$$H = \frac{1}{2m} p_x^2 + \frac{1}{2m} (p_y - eBx)^2$$

$$= -\frac{\hbar^2}{2m} \partial_x^2 + \frac{1}{2m} (-i\hbar \partial_y - eBx)^2$$

$$H \psi(x, y) = E \psi(x, y)$$

$$\psi(x, y) = e^{i k_y y} \psi(x) \quad \text{変数分離形}$$

$$\partial_y \sim i k_y$$

$e^{i k_y y}$ による

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2m} (\hbar k_y - eBx)^2 \right] \psi(x) = E \psi(x)$$

$$(-eB) \left(x - \frac{\hbar k_y}{eB} \right)$$

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{(eB)^2}{2m} \left(x - \frac{\hbar k_y}{eB} \right)^2 \right] \psi(x) = E \psi(x)$$

↑ の口 + 0 = 振動数

$$\frac{1}{2} m \omega^2 \text{ である (調和振動子の念頭) } \rightarrow m \omega^2 = \frac{(eB)^2}{m} \rightarrow \omega = \frac{eB}{m}$$

$$X = x - \frac{\hbar k_y}{eB} = x - x_{k_y} \quad \text{と} \quad \frac{d}{dx} = \frac{d}{dX}$$

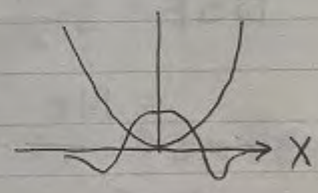
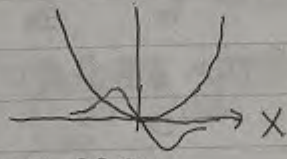
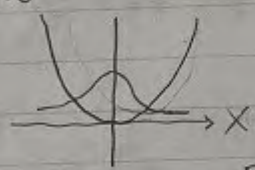
$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dX^2} + \frac{1}{2} m \omega^2 X^2 \right] \psi = E \psi$$

potential $\frac{1}{2} m \omega^2 X^2$ 中の調和振動子 $\hbar \psi = E \psi$

n=0

n=1

n=2



$X \sim 0$ に局在した波動関数

$$x \sim x_{k_y} \quad E_n = \hbar \omega \left(n + \frac{1}{2} \right) \quad n=0, 1, 2, \dots$$

k_y のとり方 → 縮退

全系: y 方向には L_y の周期的境界条件

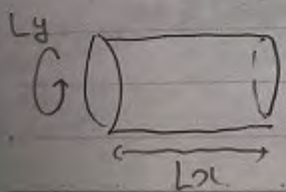
$$e^{i k_y \cdot 0} = e^{i k_y \cdot L_y} \rightarrow k_y = \frac{2\pi}{L_y} \times m \quad m=0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

x 方向には

0 ~ L_x の有限系

$$\Delta k_y = \frac{2\pi}{L_y} \quad \text{"と" 1 "と"}$$

$0 < x_{k_y} < L_x$ であるとする



$$\frac{\hbar k_y}{eB}$$

$$0 < E_y < \frac{eB}{\hbar} L_x, \quad \Delta E_y = \frac{2\pi}{L_y}$$

$$\rightarrow \text{許される } E_y \text{ の数 } N_0 = \frac{eBL_x}{\hbar} / \Delta E_y = \frac{eBL_x L_y}{h} = \frac{\Phi}{\Phi_0}, \quad \Phi_0 = \frac{h}{e} \text{ の磁束量子}$$

つまり Landau 準位は N_0 重に縮退

$$N_0 = \frac{\Phi}{\Phi_0}, \quad \Phi = BS \text{ : 糸を貫く全磁束}$$

$$S = L_x L_y \quad \Phi_0 \text{ で計ると何本あるか}$$

② 2次元の自由粒子系の状態密度について (磁場のない時)

$$H = \frac{p^2}{2m} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \quad \text{したがって } H\phi_k = \epsilon \phi_k$$

$$\phi_k = e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} = e^{i(k_x x + k_y y)}$$

一辺 L の正方形において周期的境界条件を満足すると

$$e^{i k_x L} = e^{i k_y L} = 1 \rightarrow \Delta k = \frac{2\pi}{L}$$

2次元の広い平面上 $(\frac{2\pi}{L})^2$ に 1 状態

$$\epsilon = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}, \quad k^2 = k_x^2 + k_y^2 \text{ から energy } \epsilon \text{ 以下の状態数 } N_\epsilon \text{ とし}$$

半径 k の円内の状態が N_ϵ

$$N_\epsilon = \pi k^2 / \left(\frac{2\pi}{L}\right)^2$$

$$= \frac{L^2}{4\pi^2} \pi k^2 = \frac{L^2}{4\pi^2} \frac{2m\epsilon}{\hbar^2} = L^2 \frac{m}{2\pi\hbar^2} \epsilon$$

energy 幅 $\delta\epsilon$ 内の状態 $D(\epsilon)\delta\epsilon$ とし

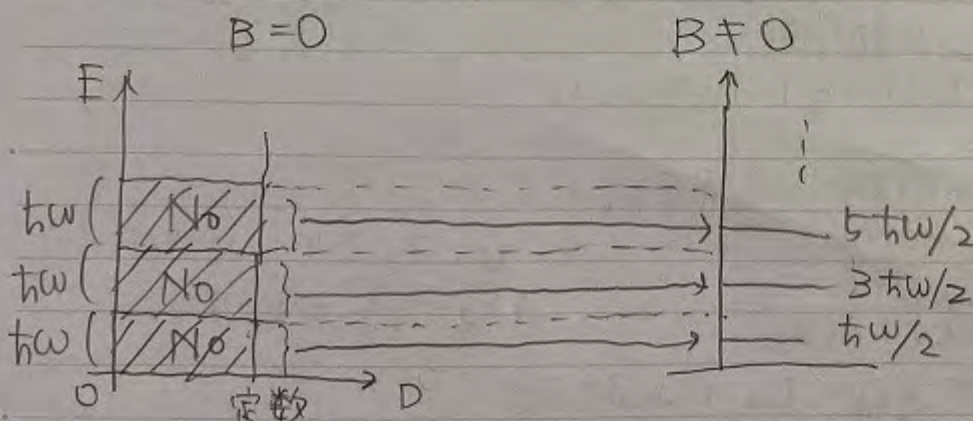
$$D(\epsilon) = \frac{dN_\epsilon}{d\epsilon} = L^2 \frac{m}{2\pi\hbar^2} = S \frac{m}{2\pi\hbar^2} = \text{定数}$$

\rightarrow Landau 準位間隔 $\Delta E = \hbar\omega = \hbar \frac{eB}{m}$ 内にある状態数は

$$D\Delta E = S \frac{m}{2\pi\hbar^2} \hbar \frac{eB}{m} = SB \frac{e}{h} = \frac{\Phi}{\Phi_0}, \quad \Phi = BS, \quad \Phi_0 = \frac{h}{e}$$

$= N_0$: Landau 準位の縮退度に等しい。

まとめると



Landau 準位向にあった
($B=0$) 状態が Landau
準位 1 つにすべて縮退する

"Landau 縮退の
物理的意味"

1次元調和振動子とIIルシ-ト多項式

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2, [x, p] = i\hbar, [a, a^\dagger] = 1$$

$$x = A(a + a^\dagger), p = B i(a - a^\dagger) \text{ とし } A, B: \text{実}$$

$$[x, p] = iAB\{ -[a, a^\dagger] + [a^\dagger, a] \} = -2iAB = i\hbar$$

$$\therefore AB = -\hbar/2$$

$$H = -\frac{B^2}{2m}(a - a^\dagger)^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 A^2(a + a^\dagger)^2 \quad a^2, a^{\dagger 2} \text{ が消えるためには}$$

$$\frac{B^2}{2m} = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 \left(\frac{\hbar}{2B}\right)^2, B^4 = \frac{m^2\omega^2\hbar^2}{4}$$

$$\therefore B = -\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\hbar m\omega}, A = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\ell, \ell = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}: \text{量子化された長さスケール}$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\hbar}{\ell}$$

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{1}{\sqrt{2}}\ell(a + a^\dagger) \\ p &= \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\hbar}{\ell}(a - a^\dagger) \end{aligned} \right\} \rightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{x}{\ell} + i\frac{\ell}{\hbar}p\right) \\ a^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{x}{\ell} - i\frac{\ell}{\hbar}p\right) \end{cases}$$

$$H = -\frac{B^2}{2m}(-aa^\dagger - a^\dagger a) + \frac{1}{2}m\omega^2 A^2(aa^\dagger + a^\dagger a)$$

$$= \frac{1}{2}m\omega^2 \frac{1}{2}\frac{\hbar}{m\omega}(2aa^\dagger + 2a^\dagger a) = \hbar\omega(a^\dagger a + \frac{1}{2}) = \hbar\omega(n + \frac{1}{2})$$

真空 $|0\rangle, a|0\rangle = 0$ に対する波動関数を $\phi_0(x)$ とすると

$$\left(\frac{x}{\ell} + i\frac{\ell}{\hbar}p\right)\phi_0 = \left(\frac{x}{\ell} + i\frac{\ell}{\hbar} \cdot \frac{\hbar}{i}\partial_x\right)\phi_0 = \left(\frac{x}{\ell} + \ell\partial_x\right)\phi_0 = 0$$

$$\therefore \phi_0 = C e^{-\frac{x^2}{2\ell^2}} \quad (\because \partial_x \phi_0 = -\frac{1}{2}\frac{2x}{\ell^2}\phi_0 = -\frac{x}{\ell^2}\phi_0)$$

正規化

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} dx |\phi_0|^2 = |C|^2 \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-\frac{x^2}{\ell^2}}, \quad x = \ell t^{1/2} \quad dx = \frac{1}{2}\ell t^{-1/2} dt$$

$$= |C|^2 \int_0^{\infty} \frac{1}{2}\ell dt t^{-1/2} e^{-t}$$

$$= |C|^2 \ell \underbrace{\int_0^{\infty} dt e^{-t} t^{-1/2}}_{\Gamma(1/2)} = |C|^2 \pi^{1/2} \ell, \quad \ell = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$$

$$\therefore C = \left(\frac{1}{\ell^2 \pi}\right)^{1/4} = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4}$$

$|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}}(a^\dagger)^n |0\rangle$ に対する固有状態 $\phi_n(x)$ とし

$$H\phi_n = \hbar\omega(n + 1/2)\phi_n$$

$$\phi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{n!}} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n \left(\frac{x}{\ell} - i\frac{\ell}{\hbar}p\right)^n \phi_0 = C \frac{1}{\sqrt{n!}} 2^{n/2} \left(\frac{x}{\ell} - \ell\partial_x\right)^n e^{-\frac{x^2}{2\ell^2}}$$

$$\xi \equiv x/\ell \quad \partial\xi = \ell\partial x$$

任意の関数 $g(\xi)$ に対して

$$\phi_n = C \frac{1}{2^{n/2}\sqrt{n!}} \underbrace{(\xi - \partial\xi)^n}_{e^{-\xi^2/2} (\xi - \partial\xi) g} e^{-\xi^2/2} = -\partial\xi (e^{-\xi^2/2} g)$$

$$e^{\xi^2/2} e^{-\xi^2/2} (\xi - \partial\xi)(\xi - \partial\xi)^{n-1} e^{-\xi^2/2} = (-\partial\xi) e^{-\xi^2/2}$$

$$e^{\xi^2/2} (-\partial\xi) e^{-\xi^2/2} (\xi - \partial\xi)^{n-1} e^{-\xi^2/2}$$

$$e^{-\xi^2/2} (\xi - \partial\xi)(\xi - \partial\xi)^{n-2} e^{-\xi^2/2}$$

$$(-\partial\xi) e^{-\xi^2/2} (\xi - \partial\xi)^{n-2} e^{-\xi^2/2}$$

$$\vdots$$

$$e^{\xi^2/2} (-\partial\xi)^n e^{-\xi^2/2} e^{-\xi^2/2}$$

$$\therefore \phi_n = C \frac{1}{2^{n/2}\sqrt{n!}} e^{\xi^2/2} (-\partial\xi)^n e^{-\xi^2}$$

$$= C \frac{1}{2^{n/2}\sqrt{n!}} e^{-\xi^2/2} e^{\xi^2} (-\partial\xi)^n e^{-\xi^2}$$

$$= \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} \frac{1}{2^{n/2}\sqrt{n!}} e^{-\xi^2/2} H_n(\xi) \quad \text{多項式} \equiv H_n(\xi) = \text{エルミート多項式}$$

ロドリゲスの公式 (エルミート多項式に関する)

規格直交性

$$x - \ell\xi = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}} \xi$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \phi_n^*(x) \phi_m(x) = \delta_{nm}$$

$$dx = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}} d\xi$$

$$C^2 \frac{1}{2^n n!} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-\xi^2} H_n(\xi) H_m(\xi)$$

$$\sqrt{\frac{m\omega}{\pi\hbar}} \quad \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}} d\xi$$

$$\rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} d\xi e^{-\xi^2} H_n(\xi) H_m(\xi) = 2^n n! \sqrt{\pi} \delta_{nm}$$

∴ エルミート多項式の規格直交性

まとめ

エルミート多項式

$$H_n(\xi) = e^{\xi^2} (-\partial_\xi)^n e^{-\xi^2} = \text{ロッドリッスの公式}$$

$$H_0(\xi) = 1$$

$$H_1(\xi) = 2\xi$$

規格直交性

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\xi e^{-\xi^2} H_n(\xi) H_m(\xi) = \sqrt{\pi} 2^n n! \delta_{nm}$$

1次元調和振動子

$$H = \frac{1}{2m} p^2 + \frac{1}{2} m \omega^2 x^2, \quad p = -i\hbar \partial_x$$

$$H \phi_n(x) = E_n \phi_n(x), \quad E_n = \hbar \omega (n + \frac{1}{2})$$

$$\phi_n(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar} \right)^{1/4} \frac{1}{2^{n/2} \sqrt{n!}} e^{-x^2/2\ell^2} H_n\left(\frac{x}{\ell}\right)$$

$$\ell = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}} = \text{量子化長}$$