2020.5.29.

◦ Γ関数とB関数.

・Γ関数.

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty dt\, e^{-t}\, t^{z-1} \qquad (\mathrm{Re}\, z > 0)$$

$$\boxed{\begin{aligned} &\cdot\ \Gamma(z+1) = z\Gamma(z) \\ &\cdot\ \Gamma(1) = 1,\ \Gamma(\tfrac{1}{2}) = \pi^{1/2} \\ &\cdot\ \Gamma(n) = (n-1)! \quad (n = 1, 2, 3, \cdots) \end{aligned}}$$

Γ関数の性質

・B関数.

$$B(x,y) = \int_0^1 dt\, t^{x-1} (1-t)^{y-1} \qquad (\mathrm{Re}\, x > 0,\ \mathrm{Re}\, y > 0)$$

$$= B(y, x)$$

$$= 2\int_0^{\pi/2} d\theta\, \sin^{2x-1}\theta\, \cos^{2y-1}\theta$$

$$= \int_0^\infty du\, \frac{u^{x+1}}{(1+u)^{x+y}}$$

異なる表し方がある!

・Γ関数とB関数が満たす関係式

$$B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$$

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z} \qquad (0 < z < 1)$$

。球面調和関数の導出.

・$Y_{\ell\ell}$ の決定

$$\begin{cases} L_+[e^{im\phi}f(\theta)] = e^{im\phi}\hbar e^{i\phi}\left[\frac{df}{d\theta} - mf\cot\theta\right] \\ Y_{\ell m}(\Omega) = \Theta_{\ell m}(\theta)\Phi_{\ell m}(\phi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{im\phi}\Theta_{\ell m}(\theta) \end{cases}$$

において, $m=\ell$, $f(\theta) = \Theta_{\ell\ell}(\theta)$ とすると.

$L_+ Y_{\ell\ell} = 0$ より $\frac{df}{d\theta} - mf\cot\theta = 0$. であるから,

$$\frac{d\Theta_{\ell\ell}}{d\theta} - \ell\cot\theta\,\Theta_{\ell\ell} = 0$$

この解は $\Theta_{\ell\ell} = C_\ell \sin^\ell\theta$ とかける.

規格化条件 $\int_0^\pi d\theta \sin\theta\,|\Theta_{\ell\ell}(\theta)|^2 = 1$ より,

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi d\theta \sin\theta\,|\Theta_{\ell\ell}(\theta)|^2 &= C_\ell^2 \int_0^\pi d\theta \sin^{2\ell+1}\theta && -\cos\theta = t. \\
&= 2C_\ell^2 \int_0^1 dt\,(1-t^2)^\ell && t = s^{1/2} \\
&= C_\ell^2 \int_0^1 ds\; s^{-1/2}(1-s)^\ell && B(x,y) = \int_0^1 dt\, t^{x-1}(1-t)^{y-1} \\
&= C_\ell^2\, B\left(\tfrac{1}{2}, \ell+1\right) && B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} \\
&= C_\ell^2 \frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\ell+1)}{\Gamma(\ell+\frac{3}{2})} && \Gamma(n) = (n-1)!,\ \Gamma(z+1) = z\Gamma(z) \\
&= C_\ell^2 \frac{\cancel{\Gamma(\frac{1}{2})}\cdot \ell!}{(\ell+1/2)\cdots(1/2)\cancel{\Gamma(1/2)}} && \text{$2\ell+1$ つある分母の $(\ell+1/2)\cdots(1/2)$ に $2^{\ell+1}$ をかける.} \\
&= C_\ell^2 \frac{2^{\ell+1}\,\ell!}{(2\ell+1)\cdots 3\cdot 1} \\
&= C_\ell^2 \frac{2^{\ell+1}\,\ell!\,(2^\ell \ell!)}{(2\ell+1)!} \\
&= C_\ell^2 \frac{(2^\ell\cdot \ell!)^2\cdot 2}{(2\ell+1)!} = 1
\end{aligned}$$

$$\therefore\ C_\ell = (-1)^\ell \sqrt{\frac{(2\ell+1)!}{2}}\ \frac{1}{2^\ell \ell!} \qquad (C_\ell = (-1)^\ell C_\ell',\ C_\ell' > 0).$$

ゆえに、 $Y_{\ell\ell} = (-1)^\ell \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{(2\ell+1)!}{2}}\ \frac{1}{2^\ell \ell!}\ e^{i\ell\phi} \sin^\ell\theta$

・ $Y_{\ell 0}$ の決定.

$$|jm-k\rangle = \hbar^{-k}\left[\frac{(j+m-k)!}{(j+m)!}\ \frac{(j-m)!}{(j-(m-k))!}\right]^{1/2} (J_-)^k\, |jm\rangle$$

を利用する. $j=m=k \to \ell$ とすると. 上式は,

$|\ell 0\rangle = \hbar^{-\ell}\left[\frac{\ell!}{(2\ell)!}\ \frac{1!}{\ell!}\right]^{1/2} L_-^{\ell}\, |\ell\ell\rangle$. と表せる.

$Y_{\ell\ell} = (-1)^\ell \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{(2\ell+1)!}{2}}\ \frac{1}{2^\ell \ell!}\ e^{i\ell\phi} \sin^\ell\theta$ に L_- を ℓ 回作用

させるが. ここで $L_-^k[e^{im\phi} f(\theta)] = \hbar^k e^{i(m-k)\phi} \sin^{-(m-k)}\theta \left[\frac{d}{d\cos\theta}\right]^k [\sin^m\theta f(\theta)]$

の関係を思い出し, $m=k \to \ell$, $f(\theta)=\sin^\ell\theta$ とすると.

$L_-^\ell[e^{im\phi} \sin^\ell\theta] = \hbar^\ell \left(\frac{d}{d\cos\theta}\right)^\ell [\sin^{2\ell}\theta]$ が得られる.

よって ＿＿＿ で表した2式を用いることにより.

$$Y_{\ell 0} = \cancel{\hbar^{-\ell}} \sqrt{\frac{\cancel{\ell!}}{(2\ell)!}\ \frac{1!}{\cancel{\ell!}}}\ (-1)^\ell \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{(2\ell+1)!}{2!}}\ \frac{1}{2^\ell \ell!}\ \cancel{\hbar^\ell} \left(\frac{d}{d\cos\theta}\right)^\ell [\sin^{2\ell}\theta]$$

$$= (-1)^\ell \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{(2\ell+1)!}{2(2\ell)!}}\ \frac{1}{2^\ell \ell!} \left(\frac{d}{d\cos\theta}\right)^\ell \sin^{2\ell}\theta$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{2\ell+1}{2}}\ \frac{1}{2^\ell \ell!} \left(\frac{d}{d\cos\theta}\right)^\ell (\cos^2\theta - 1)^\ell$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{2\ell+1}{2}}\ P_\ell(\cos\theta) \longleftarrow P_\ell(t) = \frac{1}{2^\ell \ell!}\left(\frac{d}{dt}\right)^\ell (t^2-1)^\ell$$

$$= \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}}\ P_\ell(\cos\theta)$$

・Y_{lm} の決定 $(m \geq 0)$

$$|j\, m+k\rangle = \hbar^{-k}\left[\frac{(j+m)!}{(j+m+k)!}\,\frac{(j-(m+k))!}{(j-m)!}\right]^{1/2}(J_+)^k\,|j\, m\rangle$$

を利用する。$j\to l,\ m\to 0,\ k\to m$ とすると

$$|l\, m\rangle = \hbar^{-m}\left[\frac{l!}{(l+m)!}\,\frac{(l-m)!}{l!}\right]^{1/2} L_+^m\,|l\, 0\rangle$$

$Y_{l0} = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}}\,P_l$ に L_+ を m 回作用させるが、

ここで $L_+^k\left[e^{im\phi}f(\theta)\right] = (-\hbar)^k e^{i(m+k)\phi}\sin^{m+k}\theta\left[\frac{d}{d\cos\theta}\right]^k\left[\sin^{-m}\theta\, f(\theta)\right]$

の関係を思い出し、$m=0,\ k=m,\ f=P_l$ とすると、

$$L_+^m[P_l] = (-\hbar)^m e^{im\phi}\sin^m\theta\left[\frac{d}{d\cos\theta}\right]^m P_l$$

—— で表した2式を用いて、

$$Y_{lm} = \hbar^{-m}\sqrt{\frac{l!}{(l+m)!}\,\frac{(l-m)!}{l!}}\sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}}\,(-\hbar)^m e^{im\phi}\sin^m\theta\left[\frac{d}{d\cos\theta}\right]^m P_l$$

$$= (-1)^m\sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}\,\frac{(l-m)!}{(l+m)!}}\,\sin^m\theta\left[\frac{d}{d\cos\theta}\right]^m P_l(\cos\theta)\,e^{im\phi}$$

・$Y_{lm'}$ の決定 $(m'=-m,\ m\geq 0)$

$$|j\, m-k\rangle = \hbar^{-k}\left[\frac{(j+m-k)!}{(j+m)!}\,\frac{(j-m)!}{(j-(m-k))!}\right]^{1/2}(J_-)^k\,|j\, m\rangle$$

$$\xrightarrow{j=l,\ m=0,\ k=m} |l\, -m\rangle = \hbar^{-m}\left[\frac{(l-m)!}{(l+m)!}\right]^{1/2} L_-^m\,|l\, 0\rangle$$

$$L_-^k\left[e^{im\phi}f(\theta)\right] = \hbar^k e^{i(m-k)\phi}\sin^{-(m-k)}\theta\left[\frac{d}{d\cos\theta}\right]^k\left[\sin^m\theta\, f(\theta)\right]$$

$$\xrightarrow{m=0,\ k=m,\ f=P_l} L_-^m[P_l] = \hbar^m e^{-im\phi}\sin^m\theta\left[\frac{d}{d\cos\theta}\right]^m P_l$$

上の2式を利用して、

$$Y_{lm'} = Y_{l-m} = \hbar^{-m}\sqrt{\frac{(l-m)!}{(l+m)!}}\sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}}\,\hbar^m e^{-im\phi}\sin^m\theta\left[\frac{d}{d\cos\theta}\right]^m P_l$$

$$= \sqrt{\frac{(l-m)!}{(l+m)!}\frac{2l+1}{4\pi}}\sin^m\theta\left[\frac{d}{d\cos\theta}\right]^m P_l(\cos\theta)\,e^{-im\phi}$$

○ 球面調和関数のまとめ、

軌道角運動量 $\mathbb{L} = \mathbb{r}\times\mathbb{P} = -i\hbar\left(\mathbb{e}_\phi\partial_\theta - \mathbb{e}_\theta\frac{1}{\sin\theta}\partial_\phi\right)$

→ 軌道角運動量は球面上の演算子.

球面調和関数は次のような性質を持つ.

$$\boxed{\begin{aligned} &\mathbb{L}^2 Y_{lm} = \hbar^2 l(l+1)Y_{lm} \\ &L_z Y_{lm} = \hbar m Y_{lm} \qquad (L_z = -i\hbar\partial_\phi) \\ &L_+ Y_{ll} = L_- Y_{l-l} = 0 \end{aligned}}$$

また、球面調和関数は次のように表せる. $(m\geq 0,\ m' = -m)$

$$\begin{cases} Y_{lm}(\Omega) = (-1)^m\sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}}\sin^m\theta\left[\frac{d}{d\cos\theta}\right]^m P_l(\cos\theta)\,e^{im\phi} \\ Y_{lm'}(\Omega) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}}\sin^m\theta\left[\frac{d}{d\cos\theta}\right]^m P_l(\cos\theta)\,e^{-im\phi} \end{cases}$$

$$Y_{lm}^* = (-1)^m Y_{lm'}$$

これをまとめて書くと、

$$Y_{lm} = (-1)^{\frac{1}{2}(m+|m|)}\sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}\frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!}}\sin^{|m|}\theta\left[\frac{d}{d\cos\theta}\right]^{|m|}P_l(\cos\theta)\,e^{im\phi}$$

$$= (-1)^{\frac{1}{2}(m+|m|)}\sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}\frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!}}\,P_l^{|m|}(\cos\theta)\,e^{im\phi}$$

ここで、$P_l(t) = \frac{1}{2^l l!}\left(\frac{d}{dt}\right)^l(t^2-1)^l$、 $P_l^{|m|}(t) = (1-t^2)^{\frac{|m|}{2}}\left(\frac{d}{dt}\right)^l P_l(t)$

◦ 全角運動量とルジャンドル陪関数の性質

$$\mathbb{L} = -i\hbar\left(\mathbf{e}_\phi \partial_\theta - \mathbf{e}_\theta \frac{1}{\sin\theta}\partial_\phi\right)$$

$$\mathbf{e}_\theta = \begin{pmatrix} \cos\phi\cos\theta \\ \sin\phi\cos\theta \\ -\sin\theta \end{pmatrix} \quad \partial_\theta \mathbf{e}_\theta = \begin{pmatrix} -\cos\phi\sin\theta \\ -\sin\phi\sin\theta \\ -\cos\theta \end{pmatrix} \quad \partial_\phi \mathbf{e}_\theta = \begin{pmatrix} -\sin\phi\cos\theta \\ \cos\phi\cos\theta \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{e}_\phi = \begin{pmatrix} -\sin\phi \\ \cos\phi \\ 0 \end{pmatrix} \quad \partial_\phi \mathbf{e}_\phi = \begin{pmatrix} -\cos\phi \\ -\sin\phi \\ 0 \end{pmatrix}$$

また, $\partial_\theta \mathbf{e}_\phi = 0$, $\mathbf{e}_\theta \cdot \partial_\phi \mathbf{e}_\theta = 0$ $\mathbf{e}_\phi \cdot \partial_\theta \mathbf{e}_\theta = 0$

$$\mathbb{L}^2 = -\hbar^2\left(\mathbf{e}_\phi\partial_\theta - \mathbf{e}_\theta\frac{1}{\sin\theta}\partial_\phi\right)\left(\mathbf{e}_\phi\partial_\theta - \mathbf{e}_\theta\frac{1}{\sin\theta}\partial_\phi\right)$$

$$= -\hbar^2\Big[(\mathbf{e}_\phi\cdot\mathbf{e}_\phi)\partial_\theta^2 + \cancel{\underbrace{(\mathbf{e}_\phi\cdot\partial_\theta\mathbf{e}_\phi)}_{=0}\partial_\theta} - \cancel{\underbrace{(\mathbf{e}_\phi\cdot\mathbf{e}_\theta)}_{=0}\partial_\theta\frac{1}{\sin\theta}\partial_\phi}$$

$$- \cancel{\underbrace{(\mathbf{e}_\phi\cdot\partial_\theta\mathbf{e}_\theta)}_{=0}\frac{1}{\sin\theta}\partial_\phi} - \cancel{\underbrace{(\mathbf{e}_\theta\cdot\mathbf{e}_\phi)}_{=0}\frac{1}{\sin\theta}\partial_\phi\partial_\theta}$$

$$- (\mathbf{e}_\theta\cdot\partial_\phi\mathbf{e}_\phi)\frac{1}{\sin\theta}\partial_\theta + (\mathbf{e}_\theta\cdot\mathbf{e}_\theta)\frac{1}{\sin^2\theta}\partial_\phi^2 + \cancel{\underbrace{(\mathbf{e}_\theta\cdot\partial_\phi\mathbf{e}_\theta)}_{=0}\frac{1}{\sin^2\theta}\partial_\phi}\Big]$$

$$= -\hbar^2\Big[(\mathbf{e}_\phi\cdot\mathbf{e}_\phi)\partial_\theta^2 - \underbrace{(\mathbf{e}_\theta\cdot\partial_\phi\mathbf{e}_\phi)}_{=-\cos\theta}\frac{1}{\sin\theta}\partial_\theta + (\mathbf{e}_\theta\cdot\mathbf{e}_\theta)\frac{1}{\sin^2\theta}\partial_\phi^2\Big]$$

$$= -\hbar^2\left[\partial_\theta^2 + \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\partial_\theta + \frac{1}{\sin^2\theta}\partial_\phi^2\right]$$

$$= -\hbar^2\left[\frac{1}{\sin\theta}\underbrace{\partial_\theta(\sin\theta\,\partial_\theta)}_{=\cos\theta\,\partial_\theta + \sin\theta\,\partial_\theta^2} + \frac{1}{\sin^2\theta}\partial_\phi^2\right]$$

$$\partial_\theta(\sin\theta\,\partial_\theta) = \cos\theta\,\partial_\theta + \sin\theta\,\partial_\theta^2$$

$$\mathbb{L}^2 = -\hbar^2 \left[\frac{1}{\sin\theta}\partial_\theta(\sin\theta\,\partial_\theta) + \frac{1}{\sin^2\theta}\partial_\phi^{\,2} \right]$$

$Y_{\ell m}$の性質より、$\mathbb{L}^2 Y_{\ell m} = \hbar^2 \ell(\ell+1) Y_{\ell m}$

また、$Y_{\ell m} = (2\pi)^{-1/2} e^{im\phi}\,\Theta_{\ell m}(\theta)$ であるから、

$$\left[-\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d}{d\theta}\right) + \frac{m^2}{\sin^2\theta} \right]\Theta_{\ell m} = \ell(\ell+1)\,\Theta_{\ell m}$$

$\frac{d}{d\theta} = -\sin\theta\frac{d}{d\cos\theta}$ より、$\left[-\frac{d}{d\cos\theta}\left(\sin^2\theta\frac{d}{d\cos\theta}\right) + \frac{m^2}{\sin^2\theta} \right]\Theta_{\ell m} = \ell(\ell+1)\,\Theta_{\ell m}$

ここで、$\Theta_{\ell m}(\theta) = \sqrt{\frac{2\ell+1}{2}\frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}}\,P_\ell^m(\cos\theta)$ より、$t = \cos\theta$ として、

$$\left[-\frac{d}{dt}\left((1-t^2)\frac{d}{dt}\right) + \frac{m^2}{(1-t^2)} \right] P_\ell^m(t) = \ell(\ell+1)\,P_\ell^m(t).$$

以上より、ルジャンドルの陪関数 P_ℓ^m は、次の微分方程式を満たす。

$$\frac{d}{dt}\left[(1-t^2)\frac{d}{dt}P_\ell^m(t)\right] + \left[\ell(\ell+1) - \frac{m^2}{1-t^2}\right] P_\ell^m(t) = 0$$

これをルジャンドルの陪微分方程式と呼び、特に $m=0$ として、

$$\frac{d}{dt}\left[(1-t^2)\frac{d}{dt}P_\ell(t)\right] + \ell(\ell+1)\,P_\ell(t) = 0$$

球面調和関数 $Y_{\ell m}$ と $Y_{\ell' m}$ の直交性から、

$$\frac{2\ell+1}{2}\frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}\int_{-1}^{1} d(\cos\theta)\, P_{\ell'}^m(\cos\theta)\,P_\ell^m(\cos\theta) = \delta_{\ell'\ell}$$

ℓ と ℓ' を区別しているが、一般論より $\ell = \ell'$ のとき以外これは0になる。

特に $m=0$ のとき、$\frac{2\ell+1}{2}\int_{-1}^{1} d\cos\theta\, P_{\ell'}^m(\cos\theta)\,P_\ell^m(\cos\theta) = \delta_{\ell'\ell}$

○ルジャンドル多項式の母関数展開と多重極展開

多重極展開：$\dfrac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = \dfrac{1}{\sqrt{\mathbf{r}^2+\mathbf{r}'^2-2\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}'}}$

$$= \frac{1}{r_>}\frac{1}{\sqrt{1-2\left(\frac{r_<}{r_>}\right)\cos\theta+\left(\frac{r_<}{r_>}\right)^2}}$$

$$= \sum_{l=0}^{\infty}\frac{r_<^l}{r_>^{l+1}}P_l(\cos\theta)$$

これを導く。

ロドリゲスの公式；$P_l(t) = \dfrac{1}{2^l l!}\left(\dfrac{d}{dt}\right)^l (t^2-1)^l$

ここで、グルサの定理を導入。

コーシーの積分定理より、ある関数 $f(z)$ が複素平面上正則な領域内 z を正の向きに囲む閉曲線 C_z^+ に対して、

$f(z) = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{C_z^+} d\xi \,\dfrac{f(\xi)}{\xi - z}$. これを n 回微分して、

$f^{(n)}(z) = \dfrac{n!}{2\pi i}\displaystyle\int_{C_z^+} d\xi \,\dfrac{f(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}}$ これがグルサの定理。

ロドリゲスの公式にグルサの定理を用いると

$$P_l(t) = \frac{1}{2^l l!}\frac{d^l}{dt^l}(t^2-1)^l \overset{\text{グルサの定理}}{=} \frac{1}{2^l l!}\frac{l!}{2\pi i}\int_{C_t^+} d\xi \,\frac{(\xi^2-1)^l}{(\xi - t)^{l+1}}$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{C_t^+} d\xi \left[\frac{(\xi^2-1)}{2(\xi-t)}\right]^l \frac{1}{\xi - t}.$$

$$P_\ell(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_t} d\xi \left[\frac{(\xi^2-1)}{2(\xi-t)}\right]^\ell \frac{1}{\xi-t}$$

ここで $\frac{1}{\zeta} = \frac{(\xi^2-1)}{2(\xi-t)}$ として $\xi \to \zeta$ の変換を考える.

$$\zeta(\xi^2-1) = 2(\xi-t) \iff \zeta\xi^2 - 2\xi + 2t - \zeta = 0$$

$$\iff \xi = \left(1 \pm \sqrt{1-2t\zeta+\zeta^2}\right)/\zeta$$

ここで $\xi = (1\pm R)/\zeta$, $R = \sqrt{1-2t\zeta+\zeta^2}$ とすると、

$\zeta \to 0$ の時、 $R \to 1 - t\zeta + \frac{1}{2}\zeta^2$、 $\xi \to \frac{1\pm(1-t\zeta+\frac{1}{2}\zeta^2)}{\zeta}$

なので、 $\xi = \frac{1-R}{\zeta}$ の分枝をとれば、

$\zeta \to 0$ のとき、 $\xi \to t - \frac{1}{2}\zeta$

また、 $\xi = \frac{1-R}{\zeta}$ のとき、

$$d\xi = \frac{-d\zeta}{\zeta^2}(1-R) - \frac{1}{\zeta}\frac{-2t+2\zeta}{2R}d\zeta$$

$$= \frac{-R+R^2+t\zeta-\zeta^2}{\zeta^2 R}d\zeta$$

$$= \frac{-R-t\zeta+1}{\zeta^2 R}d\zeta = \frac{\xi-t}{\zeta R}d\zeta$$

$$\therefore \frac{d\xi}{\xi-t} = \frac{d\zeta}{\zeta R}$$

$$\frac{d\xi}{\xi - t} = \frac{d\zeta}{\zeta R} . \quad P_\ell(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_0^+} d\xi \left[\frac{1}{\zeta}\right]^\ell \frac{1}{\xi - t}$$

よって. $P_\ell(t) = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{C_0^+} d\zeta \frac{1}{R\zeta^{\ell+1}}$

$$= \frac{1}{\ell!}\frac{d^\ell}{d\zeta^\ell}\frac{1}{R}\bigg|_{\zeta=0}$$

$$= \frac{1}{\ell!}\frac{d^\ell}{d\zeta^\ell}\frac{1}{\sqrt{1-2t\zeta+\zeta^2}}\bigg|_{\zeta=0}$$

これは. $\frac{1}{R}$ を $\zeta=0$ の周りでテイラー展開したものを表すと見れば.

$\frac{1}{R}$の展開は. $\dfrac{1}{R} = \dfrac{1}{\sqrt{1-2t\zeta+\zeta^2}} = \displaystyle\sum_{\ell=0}^{\infty} P_\ell(t)\zeta^\ell$

これをルジャンドル多項式の母関数展開と呼ぶ.

これを用いて.

$$\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = \frac{1}{\sqrt{\mathbf{r}^2+\mathbf{r}'^2-2\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}'}}$$

$$= \frac{1}{r_>}\frac{1}{\sqrt{1-2\left(\frac{r_>}{r_<}\right)\cos\theta+\left(\frac{r_>}{r_<}\right)^2}}$$

$$= \sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{r_<^\ell}{r_>^{\ell+1}}P_\ell(\cos\theta) \qquad t=\cos\theta,\ \zeta=\frac{r_<}{r_>}$$

ここで, $\mathbf{r}$ と $\mathbf{r}'$ がなす角の大きさが θ であり,

$|\mathbf{r}|$ と $|\mathbf{r}'|$ の大きい方が $r_>$, 小さい方が $r_<$.