# 第8回 量子力学3

## Γ関数とβ関数

☆Γ関数

$\Gamma(z)=\int_0^\infty dt\, e^{-t} t^{z-1}$ (Re $z>0$)

- $\Gamma(z+1)=z\Gamma(z)$
- $\Gamma(1)=1,\ \Gamma(\frac{1}{2})=\pi^{1/2}$
- $\Gamma(n)=(n-1)!\quad n=1,2,3,\cdots$

☆β関数

$B(x,y)=\int_0^1 dt\, t^{x-1}(1-t)^{y-1}$, Re $x>0$, Re $y>0$

$=B(y,x)$

異なる表式 $=2\int_0^{\pi/2} d\theta \sin^{2x-1}\theta\cos^{2y-1}\theta$

$=\int_0^\infty du \dfrac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}}$

$$B(x,y)=\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)},\quad \Gamma(z)\Gamma(1-z)=\frac{\pi}{\sin\pi z},\quad (0<z<1)$$ など…

## $Y_{ll}$の決定

$$L_+[e^{im\phi}f(\theta)]=e^{im\phi}\hbar e^{i\phi}\left[\frac{df}{d\theta}-mf\cot\theta\right]$$

$$Y_{lm}(\Omega)=\Theta_{lm}(\theta)\Phi_m(\phi)=\frac{1}{\sqrt{2}}e^{im\phi}\Theta_{lm}(\theta)$$

$L_+Y_{ll}=0$から$\Theta_{ll}$が満たす方程式を書けば

$$\frac{\partial\Theta_{ll}}{\partial\theta}-l\cot\theta\,\Theta_{ll}=0$$

$$\frac{d}{d\theta}\sin^l\theta=l\sin^{l-1}\theta\cdot\cos\theta=l\sin^l\theta\cot\theta$$

この解は$\Theta_{ll}=C_l\sin^l\theta$とかける。規格化条件$\int_0^\pi d\theta\sin\theta|\Theta_{ll}(\theta)|^2=1$より定数$C_l$を求めれば $C_l=(-)^l\sqrt{\frac{(2l+1)!}{2}}\frac{1}{2^l l!}$ ただし$C_l=(-)^l C_l'$, $C_l'>0$と符号を選んだ。

$$Y_{ll}(\Omega)=(-)^l\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{\frac{(2l+1)!}{2}}\frac{1}{2^l l!}e^{il\phi}\sin^l\theta$$

$$\int_0^\pi d\theta\sin\theta|\Theta|^2=C_l^2\int_0^\pi d\theta\sin^{2l+1}\theta=C_l^2\int_{-1}^1 d(-\cos\theta)(1-\cos^2\theta)^l\quad(-\cos\theta=t)$$

$$=2C_l^2\int_0^1 dt(1-t^2)^l,\quad t=s^{1/2},\ (dt=\tfrac{1}{2}s^{-1/2}ds)$$

$$=C_l^2\int_0^1 ds\, s^{-1/2}(1-s)^l=C_l^2 B(1/2,l+1)$$

$$=C_l^2\frac{\Gamma(1/2)\Gamma(l+1)}{\Gamma(l+3/2)}=C_l^2\frac{\Gamma(1/2)l!}{(l+\frac{1}{2})\cdots(1/2)\Gamma(1/2)}$$

$$=C_l^2\frac{2^{l+1}l!}{\underbrace{1\cdot3\cdots(2l+1)}_{l+1コ}}=C_l^2\frac{2^{l+1}l!(2^l l!)}{(2l+1)!}\qquad 2^l l!=2\cdot4\cdot6\cdots(2l)$$

$$=C_l^2\frac{(2^l l!)^2}{(2l+1)!}2$$

$Y_{\ell 0}$ の決定

$$L_-^k[e^{im\phi}f(\theta)] = \hbar^k e^{i(m-k)\phi}\sin^{-(m-k)}\theta\left[\frac{d}{d\cos\theta}\right]^k[\sin^m\theta f(\theta)]$$

$$m=k\to\ell,\ f=\sin^\ell\theta,\ L_-^\ell[e^{i\ell\phi}\sin^\ell\theta]=\hbar^\ell\left(\frac{d}{d\cos\theta}\right)^\ell\sin^{2\ell}\theta$$

$$|j\,m-k\rangle=\hbar^{-k}\left[\frac{(j+m-k)!}{(j+m)!}\frac{(j-m)!}{(j-(m-k))!}\right]^{1/2}(J_-)^k|j\,m\rangle$$

$$j=m=k\to\ell,\ |\ell\,0\rangle=\hbar^{-\ell}\left[\frac{\ell!}{(2\ell)!}\frac{1}{\ell!}\right]^{1/2}L_-^\ell|\ell\,\ell\rangle_*$$

$$Y_{\ell\ell}(\Omega)=(-)^\ell\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{\frac{(2\ell+1)!}{2}}\frac{1}{2^\ell\ell!}e^{i\ell\phi}\sin^\ell\theta$$

$$Y_{\ell 0}(\Omega)\underset{*}{=}\hbar^{-\ell}\sqrt{\frac{\ell!}{(2\ell)!}\frac{1}{\ell!}}L_-^\ell Y_{\ell\ell}=\sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}}P_\ell(\cos\theta)$$

$\ell$ 次のルジャンドル多項式

$$P_\ell(t)=\frac{1}{2^\ell\ell!}\frac{d^\ell}{dt^\ell}(t^2-1)^\ell \quad \text{ロドリゲスの公式}$$

---

$$Y_{\ell 0}(\Omega)=(-)^\ell\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{\frac{(2\ell+1)!}{2(2\ell)!}}\frac{1}{2^\ell\ell!}\left[\frac{d}{d\cos\theta}\right]^\ell\sin^{2\ell}\theta$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{\frac{2\ell+1}{2}}\frac{1}{2^\ell\ell!}\left[\frac{d}{d\cos\theta}\right]^\ell(\cos^2\theta-1)^\ell$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{\frac{2\ell+1}{2}}P_\ell(\cos\theta)$$

$Y_{\ell m}$ の決定 $(m\geqq 0)$

$$L_+^k[e^{im\phi}f(\theta)]=(-\hbar)^k e^{i(m+k)\phi}\sin^{m+k}\theta\left[\frac{d}{d\cos\theta}\right]^k[\sin^{-m}\theta f(\theta)]$$

$$m=0,\ k\to m,\ f=P_\ell,\ L_+^m[P_\ell]=(-\hbar)^m e^{im\phi}\sin^m\theta\left(\frac{d}{d\cos\theta}\right)^m P_\ell$$

$$|j\,m+k\rangle=\hbar^{-k}\left[\frac{(j+m)!}{(j+m+k)!}\frac{(j-(m+k))!}{(j-m)!}\right]^{1/2}(J_+)^k|j\,m\rangle$$

$$j\to\ell,\ m=0,\ k\to m,\ |\ell,m\rangle=\hbar^{-m}\left[\frac{\ell!\,(\ell-m)!}{(\ell+m)!\,\ell!}\right]^{1/2}L_+^m|\ell\,0\rangle$$

$$Y_{\ell 0}(\Omega)=\sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}}P_\ell(\cos\theta)$$

$m>0$ に対して $Y_{\ell m}$ を求めれば $Y_{\ell m}=\hbar^{-m}\sqrt{\frac{\ell!}{(\ell+m)!}\frac{(\ell-m)!}{\ell!}}L_+^m|\ell 0\rangle$ より

$$Y_{\ell m}(\Omega)=(-)^m\sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}\frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}}\sin^m\theta\left[\frac{d}{d\cos\theta}\right]^m P_\ell(\cos\theta)e^{im\phi}$$

$Y_{lm'}$の決定
$(m'=-m,\ m\geq 0)$

$$L_-^k[e^{im\phi}f(\theta)]=\hbar^k e^{i(m-k)\phi}\sin^{-(m-k)}\theta\left[\frac{d}{d\cos\theta}\right]^k[\sin^m\theta f(\theta)]$$

$k\to m,\ m\to 0,\ f=P_l,\ L_-^m[P_l]=\hbar^m e^{-im\phi}\sin^m\theta\left(\frac{d}{d\cos\theta}\right)^m P_l$

$$|jm-k\rangle=\hbar^{-k}\left[\frac{(j+m-k)!}{(j+m)!}\frac{(j-m)!}{(j-(m-k))!}\right]^{1/2}(J_-)^k|jm\rangle$$

$j\to l,\ m=0,\ k\to m,\ |l-m\rangle=\hbar^{-m}\left[\frac{(l-m)!}{l!}\frac{l!}{(l+m)!}\right]^{1/2}L_-^m|l0\rangle$

$$Y_{l0}(\Omega)=\sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}}P_l(\cos\theta)$$

$m'=-m,\ m\geq 0$に対して$Y_{lm'}=Y_{l-m}$を求めれば

$Y_{l-m}=\hbar^{-m}\sqrt{\frac{(l-m)!}{l!}\frac{l!}{(l+m)!}}L_-^m Y_{l0}$より

$$Y_{lm'}(\Omega)=Y_{l-m}(\Omega)=\sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}}\sin^m\theta\left[\frac{d}{d\cos\theta}\right]^m P_l(\cos\theta)e^{-im\phi}$$

まとめ　軌道角運動量 $\mathbb{L}=\mathbb{r}\times\mathbb{P}=-i\hbar(\mathbb{e}_\phi\partial_\theta-\mathbb{e}_\theta\frac{1}{\sin\theta}\partial_\phi)$

球面調和関数

$$\mathbb{L}^2Y_{lm}=\hbar^2 l(l+1)Y_{lm}$$

$$L_zY_{lm}=\hbar mY_{lm}$$

$$L_+Y_{ll}=L_-Y_{l-l}=0$$

$(m\geq 0)$ $$Y_{lm}(\Omega)=(-)^m\sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}}\sin^m\theta\left[\frac{d}{d\cos\theta}\right]^m P_l(\cos\theta)e^{im\phi}$$

$m'=-m$
$$Y_{lm'}(\Omega)=Y_{l-m}(\Omega)=\sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}}\sin^m\theta\left[\frac{d}{d\cos\theta}\right]^m P_l(\cos\theta)e^{-im\phi}$$

$$Y_{lm}^*=(-)^mY_{l-m}$$

まとめて書けば

$$Y_{lm}=(-)^{\frac{1}{2}(m+|m|)}\sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}\frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!}}\sin^{|m|}\theta\left[\frac{d}{d\cos\theta}\right]^{|m|}P_l(\cos\theta)e^{im\phi}$$

$$=(-)^{\frac{1}{2}(m+|m|)}\sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}\frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!}}P_l^{|m|}(\cos\theta)e^{im\phi}$$

$$\frac{1}{2}(m+|m|)=\begin{cases}m & (m\geq 0)\\ 0 & (m<0)\end{cases}$$

Legendre多項式

$$P_l(t)=\frac{1}{2^l l!}\frac{d^l}{dt^l}(t^2-1)^l$$

Legendreの陪関数

$$P_l^{|m|}(t)=(1-t^2)^{\frac{|m|}{2}}\frac{d^{|m|}}{dt^{|m|}}P_l(t)$$

全角運動量 $\mathbb{L}^2$ について

$$\mathbb{L} = -i\hbar\left(\mathbf{e}_\phi \partial_\theta - \mathbf{e}_\theta \frac{1}{\sin\theta} \partial_\phi\right)$$

$$\mathbf{e}_\theta = \begin{pmatrix} \cos\phi\cos\theta \\ \sin\phi\cos\theta \\ -\sin\theta \end{pmatrix} \quad \mathbf{e}_\phi = \begin{pmatrix} -\sin\phi \\ \cos\phi \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\partial_\theta \mathbf{e}_\theta = \begin{pmatrix} -\cos\phi\sin\theta \\ -\sin\phi\sin\theta \\ -\cos\theta \end{pmatrix} \quad \partial_\phi \mathbf{e}_\phi = \begin{pmatrix} -\cos\phi \\ -\sin\phi \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\partial_\phi \mathbf{e}_\theta = \begin{pmatrix} -\sin\phi\cos\theta \\ \cos\phi\cos\theta \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{aligned} &\partial_\theta \mathbf{e}_\phi = 0 \ \text{Ⓒ} \\ &\mathbf{e}_\theta \cdot \partial_\phi \mathbf{e}_\theta = 0 \ \text{Ⓐ} \\ &\mathbf{e}_\phi \cdot \partial_\theta \mathbf{e}_\theta = 0 \ \text{Ⓑ} \end{aligned}$$

$$\mathbb{L}^2 = -\hbar^2\left(\mathbf{e}_\phi \partial_\theta - \mathbf{e}_\theta \frac{1}{\sin\theta} \partial_\phi\right)\left(\mathbf{e}_\phi \partial_\theta - \mathbf{e}_\theta \frac{1}{\sin\theta} \partial_\phi\right)$$

$$= -\hbar^2\Big[ \overset{①}{(\mathbf{e}_\phi \cdot \mathbf{e}_\phi)}\partial_\theta^2 + \overset{①\,Ⓒ}{(\mathbf{e}_\phi \cdot \partial_\theta \mathbf{e}_\phi)}\partial_\theta - \overset{②}{(\mathbf{e}_\phi \cdot \mathbf{e}_\theta)}\partial_\theta \frac{1}{\sin\theta}\partial_\phi$$

$$- \overset{②\,Ⓑ}{(\mathbf{e}_\phi \cdot \partial_\theta \mathbf{e}_\theta)} \frac{1}{\sin\theta}\partial_\phi - \overset{③}{(\mathbf{e}_\theta \cdot \mathbf{e}_\phi)} \frac{1}{\sin\theta}\partial_\phi\partial_\theta - \overset{③}{(\mathbf{e}_\theta \cdot \partial_\phi \mathbf{e}_\phi)} \frac{1}{\sin\theta}\partial_\theta$$

$$+ \overset{④}{(\mathbf{e}_\theta \cdot \mathbf{e}_\theta)} \frac{1}{\sin^2\theta}\partial_\phi^2 + \overset{④\,Ⓐ}{(\mathbf{e}_\theta \cdot \partial_\phi \mathbf{e}_\theta)} \frac{1}{\sin^2\theta}\partial_\phi \Big]$$

$$= -\hbar^2\left[(\mathbf{e}_\phi \cdot \mathbf{e}_\phi)\partial_\theta^2 - (\mathbf{e}_\theta \cdot \partial_\phi \mathbf{e}_\phi)\frac{1}{\sin\theta}\partial_\theta + (\mathbf{e}_\theta \cdot \mathbf{e}_\theta)\frac{1}{\sin^2\theta}\partial_\phi^2\right]$$

$$(\mathbf{e}_\theta \cdot \partial_\phi \mathbf{e}_\phi) = -\cos^2\phi\cos\theta - \sin^2\phi\cos\theta = -\cos\theta$$

$$= -\hbar^2\left[\partial_\theta^2 + \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\partial_\theta + \frac{1}{\sin^2\theta}\partial_\phi^2\right]$$

$$= -\hbar^2\left[\frac{1}{\sin\theta}\partial_\theta(\sin\theta\,\partial_\theta) + \frac{1}{\sin^2\theta}\partial_\phi^2\right]$$

$$\mathbb{L}^2 = -\hbar^2\left[\frac{1}{\sin\theta}\partial_\theta(\sin\theta\,\partial_\theta) + \frac{1}{\sin^2\theta}\partial_\phi^2\right], \quad \Theta_{\ell m}(\theta) = \sqrt{\frac{2\ell+1}{2}\frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}}\,P_\ell^m(\cos\theta)$$

よって $\mathbb{L}^2 Y_{\ell m} = \hbar^2 \ell(\ell+1) Y_{\ell m}$ より $Y_{\ell m} = (2\pi)^{-1/2} e^{im\phi}\,\Theta_{\ell m}(\theta)$ だから

$$\left[-\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d}{d\theta}\right)+\frac{m^2}{\sin^2\theta}\right]\Theta_{\ell m}=\ell(\ell+1)\,\Theta_{\ell m}$$

$$\frac{d}{d\theta}=-\sin\theta\frac{d}{d\cos\theta}$$

$$\left[-\frac{d}{d\cos\theta}\left(\sin^2\theta\frac{d}{d\cos\theta}\right)+\frac{m^2}{\sin^2\theta}\right]\Theta_{\ell m}=\ell(\ell+1)\,\Theta_{\ell m}$$

だから $t=\cos\theta$ と書いて

$$\left[-\frac{d}{dt}\left((1-t^2)\frac{d}{dt}\right)+\frac{m^2}{1-t^2}\right]P_\ell^m(t)=\ell(\ell+1)P_\ell^m(t)$$

ルジャンドルの陪関数は次のルジャンドルの陪微分方程式を満たす。

$$\frac{d}{dt}\left((1-t^2)\frac{dP_\ell^m(t)}{dt}\right)+\left[\ell(\ell+1)-\frac{m^2}{1-t^2}\right]P_\ell^m(t)=0$$

特に $m=0$ として

$$\frac{d}{dt}\left((1-t^2)\frac{dP_\ell(t)}{dt}\right)+\ell(\ell+1)P_\ell(t)=0$$

球面調和関数 $Y_{\ell m}$ と $Y_{\ell' m}$ との直交関係から

$$\frac{2\ell+1}{2}\frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}\int_{-1}^{1}d(\cos\theta)\,P_{\ell'}^m(\cos\theta)\,P_\ell^m(\cos\theta)=\delta_{\ell\ell'}$$

$$\frac{2\ell+1}{2}\frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}\int_{-1}^{1}dt\,P_{\ell'}^m(t)P_\ell^m(t)=\delta_{\ell'\ell}$$

特に $m=0$ の時

$$\frac{2\ell+1}{2}\int_{-1}^{1}dt\,P_{\ell'}(t)\,P_\ell(t)=\delta_{\ell'\ell}$$

ロドリゲスの公式から多重極展開を導こう

$$\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}=\frac{1}{\sqrt{\mathbf{r}^2+\mathbf{r}'^2-2\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}'}}=\frac{1}{r_>}\frac{1}{\sqrt{1-2\left(\frac{r_<}{r_>}\right)\cos\theta+\left(\frac{r_<}{r_>}\right)^2}}$$

$$=\sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{r_<^\ell}{r_>^{\ell+1}}P_\ell(\cos\theta)$$

グルサの定理　　$C_t^+$はtを正にまわる十分小さな積分路

$$P_\ell(t)=\frac{1}{2^\ell \ell!}\frac{d^\ell}{dt^\ell}(t^2-1)^\ell = \frac{1}{2^\ell \ell!}\frac{\ell!}{2\pi i}\int_{C_t^+} d\xi \frac{(\xi^2-1)^\ell}{(\xi-t)^{\ell+1}} = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_t^+} d\xi \left[\frac{\xi^2-1}{2(\xi-t)}\right]^\ell \frac{1}{\xi-t}$$

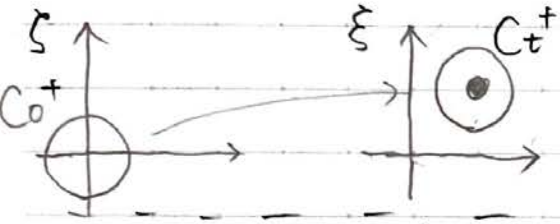
$\frac{1}{\zeta}=\frac{\xi^2-1}{2(\xi-t)}$ として $\xi\to\zeta$ の変数変換を考える.

$\zeta\xi^2-\zeta=2\xi-2t,\ \zeta\xi^2-2\xi+2t-\zeta=0,\ \xi=(1\pm\sqrt{1-2t\zeta+\zeta^2})/\zeta$

$\xi=\frac{1\pm R}{\zeta}$, $R=\sqrt{1-2t\zeta+\zeta^2}$ と書けば

$\zeta\to 0$ の時 $R\to 1-t\zeta+\frac{1}{2}\zeta^2$, $\xi\to\frac{1\pm(1-t\zeta+\frac{1}{2}\zeta^2)}{\zeta}$ なので

$\xi=\frac{1-R}{\zeta}$ の分枝をとれば $\zeta\to 0$ の時 $\xi\to t-\frac{1}{2}\zeta$




ζ平面の$C_0^+$はξ平面の$C_t^+$に向きを保存して写る

コーシーの積分定理よりある関数f(z)が複素平面上正則な領域内zを正の向きに囲む閉曲線$C_z^+$に対して

$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_z^+} d\xi \frac{f(\xi)}{\xi-z}$ これをn回微分して

$f^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi i}\int_{C_z^+} d\xi \frac{f(\xi)}{(\xi-z)^{n+1}}$ ＝グルサの定理

$\xi=\frac{1-R}{\zeta}$　　$R=(1-2t\zeta+\zeta^2)^{1/2}$　$dR/d\zeta=\frac{1}{2R}(-2t+2\zeta)$

$$d\xi=\frac{-d\zeta}{\zeta^2}(1-R)-\frac{1}{\zeta}\frac{-2t+2\zeta}{2R}d\zeta=\frac{-R+\overset{1-2t\zeta+\zeta^2}{R^2}+t\zeta-\zeta^2}{\zeta^2 R}d\zeta$$

$$=\frac{-R-t\zeta+1}{\zeta^2 R}d\zeta=\frac{\xi-t}{\zeta R}d\zeta$$

$$\frac{d\xi}{\xi-t}=\frac{d\zeta}{R\zeta}$$

グルサの定理

よって $P_\ell(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_0^+} d\zeta \frac{1}{R\zeta^{\ell+1}} = \frac{1}{\ell!}\frac{d^\ell}{d\zeta^\ell}\frac{1}{R}\Big|_{\zeta=0} = \frac{1}{\ell!}\frac{d^\ell}{d\zeta^\ell}\frac{1}{\sqrt{1-2t\zeta+\zeta^2}}\Big|_{\zeta=0}$

これは$\frac{1}{R}$を$\zeta=0$の周りでテイラー展開するとみれば

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{\sqrt{1-2t\zeta+\zeta^2}} = \sum_{\ell=0}^{\infty} P_\ell(t)\zeta^\ell$$

これをルジャンドル関数の母関数展開と呼ぶ。

これを用いて

$$\boxed{\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = \frac{1}{\sqrt{\mathbf{r}^2+\mathbf{r}'^2-2\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}'}} = \frac{1}{r_>}\frac{1}{\sqrt{1-2\left(\frac{r_<}{r_>}\right)\cos\theta+\left(\frac{r_<}{r_>}\right)^2}} = \sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{r_<^\ell}{r_>^{\ell+1}}P_\ell(\cos\theta)}$$

ここで$\mathbf{r}$と$\mathbf{r}'$がなす角の大きさが$\theta$であり、$r_>$は$|\mathbf{r}|$と$|\mathbf{r}'|$の大きい方
$r_<$は小さい方