5/19 第6回　　　　　　　　　　　　201810869 永井るい

角運動量の量子化

$$[J^2, J_z] = 0$$

規格直交化された完全な同時固有状態を $|jm\rangle$ と書く.

$$J^2|jm\rangle = j(j+1)\hbar^2|jm\rangle \qquad j(j+1) \geq 0$$

$$J_z|jm\rangle = m\hbar|jm\rangle$$

$$\langle jm|j'm'\rangle = \delta_{jj'}\delta_{mm'} \quad \text{規格直交性}$$

$$\sum_{jm}|jm\rangle\langle jm| = 1 \quad \text{完全性}$$

任意の状態 $|\psi\rangle$ が $|\psi\rangle = \sum|jm\rangle a_{jm}$ と展開できる。

$$\langle jm|\psi\rangle = a_{jm}$$

$$\rightarrow |\psi\rangle = \sum|jm\rangle\langle jm|\psi\rangle$$

$|\psi\rangle$ は任意であるから

$$1 = \sum|jm\rangle\langle jm|$$

まず $[J_z, J_\pm] = \pm\hbar J_\pm$ を $\langle jm|$, $|jm\rangle$ で挟めば

$$(m-m')\hbar\langle jm|J_\pm|jm'\rangle = \pm\langle jm|J_\pm|jm'\rangle$$

よって $\langle jm|J_\pm|jm'\rangle$ は

$$\langle jm|J_\pm|jm'\rangle = 0 \ , \quad m \neq m'\pm 1$$

$$\left(\begin{cases}\langle jm+1|J_+|jm\rangle \neq 0 \\ \langle jm-1|J_-|jm\rangle \neq 0\end{cases}\right)$$

続いて

$$J_z J_+|jm\rangle = [J_z, J_+]|jm\rangle + J_+J_z|jm\rangle$$

$$= \hbar(m+1)J_+|jm\rangle \qquad \leftarrow [J_z, J_\pm] = \pm\hbar J_\pm$$

つまり J_+ は m が一つ増えた状態をつくる上昇演算子となる.

$$J_+|jm\rangle \propto |jm+1\rangle$$

同様に J_- は次のような下降演算子である.

$$J_-|jm\rangle \propto |jm-1\rangle$$

そこで $|jm+1\rangle = CJ_+|jm\rangle$ として規格化定数 C を決める。ここで $J_-J_+ = J^2 - J_z(J_z+\hbar)$ に注意して

$$\langle jm+1|jm+1\rangle = |C|^2\langle jm|J_-J_+|jm\rangle$$

$$= |C|^2\hbar^2[j(j+1)-m(m+1)] = \hbar^2(j-m)(j+m+1)|C|^2$$

よって C を正に選べば(もちろんここに位相の自由度がある)

$$|jm+1\rangle = \frac{1}{\hbar\sqrt{(j-m)(j+m+1)}}J_+|jm\rangle$$

よって

$$\langle jm+1|J_+|jm\rangle = \hbar\sqrt{(j-m)(j+m+1)}$$

同様に $|jm-1\rangle = c J_- |jm\rangle$ として規格化定数 c を決める。ここで $J_+J_- = \mathbf{J}^2 - J_z(J_z - \hbar)$ に注意して

$$\langle jm-1|jm-1\rangle = |c|^2 \langle jm| J_+ J_- |jm\rangle$$
$$= |c|^2\hbar^2[j(j+1) - m(m-1)] = \hbar^2(j+m)(j-m+1)|c|^2$$

よって c を正に選べば

$$|jm-1\rangle = \frac{1}{\hbar\sqrt{(j+m)(j-m+1)}} J_- |jm\rangle$$

よって

$$\langle jm-1| J_- |jm\rangle = \hbar\sqrt{(j+m)(j-m+1)}$$

この符号の決め方は全てが正であることからわかるように整合的である。これを次のように確認する。

$$|jm+1\rangle = \frac{1}{\hbar\sqrt{(j+m+1)(j-m)}} J_+ |jm\rangle$$

よって

$$|jm\rangle = \frac{1}{\hbar\sqrt{(j+m+1)(j-m)}} J_- |jm+1\rangle$$
$$= \frac{1}{\hbar^2(j+m+1)(j-m)} J_- J_+ |jm\rangle$$
$$= \frac{1}{\hbar^2(j+m+1)(j-m)} (\mathbf{J}^2 - J_z(J_z+\hbar))|jm\rangle$$
$$= \frac{1}{(j+m+1)(j-m)} (j(j+1) - m(m+1))|jm\rangle$$
$$= \frac{(j-m)(j+m+1)}{(j+m+1)(j-m)}|jm\rangle = |jm\rangle$$

一方で $J_x^2 + J_y^2 = \mathbf{J}^2 - J_z^2$

$$\langle jm|(\mathbf{J}^2 - J_z^2)|jm\rangle = \hbar^2[j(j+1) - m^2] = \langle jm|J_x^2|jm\rangle + \langle jm|J_y^2|jm\rangle \geq 0$$

$J_x^\dagger = J_x$

$(J_x|jm\rangle)^\dagger J_x|jm\rangle = \| J_x|jm\rangle\|^2 \geq 0$

$J_y^\dagger = J_y$

同様に $\| J_y|jm\rangle\|^2 \geq 0$

c.f. $\| |\psi\rangle\|^2 = \langle\psi|\psi\rangle$

これから $j(j+1) \geq m^2$

$$-\sqrt{j(j+1)} \leq m \leq \sqrt{j(j+1)}$$

つまり m には最大と最小値がある。よって $J_\pm$ を作用させることにより m の異なる状態を構成していく手続きは何処かで終了する必要がある。よってその最大値と最小値を m_1, $-m_2$ とすれば

$$J_+|jm_1\rangle = 0 \qquad m_1 \geq 0$$
$$J_-|j-m_2\rangle = 0 \qquad m_2 \geq 0$$

となることを要求する。

$J_- J_+ = J^2 - J_z(J_z + \hbar)$ より　　$\| J_+ |jm_1\rangle \|^2 = \langle jm_1 | \underset{J_- J_+}{J_+^\dagger J_+} | jm\rangle$

$$\| |J_+ |jm_1\rangle \|^2 / \hbar^2 = j(j+1) - m_1(m_1+1)$$

$$= (j+m_1)(j-m_1) + j - m_1 = (j-m_1)(j+m_1+1) = 0$$

これから $m_1 = j$ つまり

$$J_+ |jj\rangle = 0 \quad \cdots ①$$

また，$J_+ J_- = J^2 - J_z(J_z - \hbar)$ より

$$\| |J_- |j-m_2\rangle \|^2 / \hbar^2 = j(j+1) + m_2(-m_2-1)$$

$$= (j+m_2)(j-m_2) + j - m_2 = (j-m_2)(j+m_2+1) = 0$$

これから $m_2 = j$ つまり

$$J_- |j -j\rangle = 0 \quad \cdots ②$$

①.②より $|jm\rangle$ に対し　$-j \leq m \leq j$

よって $\| |jj\rangle \| \neq 0$ である状態からはじめて

$$(J_-)^k |jj\rangle \propto |jj-k\rangle$$

を順に作ったとする。これが無限に続かないためにはある0以上の整数 k に対して $j-k = -j$ とならなければならない。つまり，$j = \frac{k}{2} = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \ldots$ が必要である。つまり角運動量は任意の値をとらず，量子化値のみをとる。

角運動量の量子化

角運動量は非負の整数もしくは半(奇)整数に量子化される

$$j = \frac{k}{2} = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \ldots$$

$$\langle jm+1 | J_+ | jm\rangle = \hbar\sqrt{(j+m+1)(j-m)}$$

$$|jm+1\rangle = \frac{1}{\hbar\sqrt{(j+m+1)(j-m)}} J_+ |jm\rangle = \hbar^{-1}\left[\frac{(j+m+1)!}{(j+m)!}\frac{(j-m)!}{(j-(m+1))!}\right]^{-1/2} J_+ |jm\rangle$$

$$|jm+2\rangle = \frac{1}{\sqrt{(j+m+1)(j+m+2)(j-m)(j-m-1)}} (J_+)^2 |jm\rangle = \hbar^{-2}\left[\frac{(j+m+2)!}{(j+m)!}\frac{(j-m)!}{(j-(m+2))!}\right]^{-1/2} (J_+)^2 |jm\rangle$$

$$|jm+k\rangle = \frac{1}{\sqrt{(j+m+1)\cdots(j+m+k)\cdot(j-m)\cdots(j-m-k+1)}} (J_+)^k |jm\rangle$$

$$= \hbar^{-k}\left[\frac{(j+m)!}{(j+m+k)!}\frac{(j-(m+k))!}{(j-m)!}\right]^{-1/2} (J_+)^k |jm\rangle$$

$$\langle jm | (J_+)^{m-m'} | jm'\rangle = \hbar^{m-m'}\left[\frac{(j+m)!}{(j+m')!}\frac{(j-m')!}{(j-m)!}\right]^{1/2}, \quad (m > m')$$

$$\langle jm-1|J_-|jm\rangle = \hbar\sqrt{(j+m)(j-m+1)}$$

$$|jm-1\rangle = \frac{1}{\hbar\sqrt{(j+m)(j-m+1)}} J_-|jm\rangle$$

$$|jm-2\rangle = \frac{1}{\hbar^2\sqrt{(j+m)(j+m-1)(j-m+1)(j-m+2)}} J_-^2|jm\rangle$$

$$|jm-k\rangle = \frac{1}{\hbar^k\sqrt{(j+m)\cdots(j+m-k+1)\cdot(j-m+1)\cdots(j-m+k)}} (J_-)^k|jm\rangle$$

$$= \hbar^{-k}\left[\frac{(j+m-k)!}{(j+m)!}\frac{(j-m)!}{(j-(m-k))!}\right]^{1/2}(J_-)^k|jm\rangle$$

$$\langle jm|(J_-)^{m'-m}|jm'\rangle = \hbar^{m'-m}\left[\frac{(j+m')!}{(j+m)!}\frac{(j-m)!}{(j-m')!}\right]^{1/2}, \quad m<m'$$