量子力学3 第6回 3/19(火)

20B10880 不破修

角運動量の量子化

$[J^2, J_z] = 0$

規格直交化された完全な同時固有状態を $|jm\rangle$ と書く.

$J^2|jm\rangle = j(j+1)\hbar^2|jm\rangle \quad j(j+1) \geq 0$

$J_z|jm\rangle = m\hbar|jm\rangle$

$\langle jm|j'm'\rangle = \delta_{jj'}\delta_{mm'}$: 規格直交性

$\sum_{jm} |jm\rangle\langle jm| = 1$: 完全性

任意の状態 $|\psi\rangle$ が

$|\psi\rangle = \sum |jm\rangle a_{jm}$ と展開できる.

$\langle jm|\psi\rangle = a_{jm} \rightarrow |\psi\rangle = \sum |jm\rangle\langle jm|\psi\rangle$

$|\psi\rangle$ は任意 $\quad 1 = \sum |jm\rangle\langle jm|$

まず $[J_z, J_\pm] = \pm\hbar J_\pm$ を $\langle jm|, |jm'\rangle$ で挟めば

$(m-m')\hbar\langle jm|J_\pm|jm'\rangle = \pm\langle jm|J_\pm|jm'\rangle$

よって $\langle jm|J_\pm|jm'\rangle$ は

$\langle jm|J_\pm|jm'\rangle = 0, \quad m \neq m' \pm 1 \quad (m-m' \mp 1 \neq 0)$

$$\left.\begin{array}{l}\langle jm+1|J_+|jm\rangle \neq 0 \\ \langle jm-1|J_-|jm\rangle \neq 0\end{array}\right\} \text{この2つだけが0じゃない}$$

続いて $\quad J_zJ_+|jm\rangle = [J_z, J_+]|jm\rangle + J_+J_z|jm\rangle$

$= \hbar(m+1)(J_+|jm\rangle)$

つまり J_+ は m が1つ増えた状態をつくる上昇演算子となる.

$J_+|jm\rangle \propto |jm+1\rangle$

同様に J_- は次のような下降演算子である

$J_-|jm\rangle \propto |jm-1\rangle$

そこで $|jm+1\rangle = CJ_+|jm\rangle$ として規格化定数 C を決めよう.

ここで $J_-J_+ = J^2 - J_z(J_z+\hbar)$ に注意して

$\langle jm+1|jm+1\rangle = |C|^2\langle jm|J_-J_+|jm\rangle$

$1 \quad = |C|^2\hbar^2[j(j+1) - m(m+1)] = \hbar^2(j-m)(j+m+1)|C|^2$

よって <u>C を正に選べば</u> (位相の自由がある)

$|jm+1\rangle = \dfrac{1}{\hbar\sqrt{(j-m)(j+m+1)}}J_+|jm\rangle \iff \langle jm+1|J_+|jm\rangle = \hbar\sqrt{(j-m)(j+m+1)}$

同様に $|jm-1\rangle = CJ_-|jm\rangle$ として規格化定数 C を決めよう
$J_+J_- = \mathbf{J}^2 - J_z(J_z-\hbar)$ に注意して

$$\langle jm-1|jm-1\rangle = |C|^2\langle jm|J_+J_-|jm\rangle$$
$$\overset{\parallel}{1} \quad = |C|^2\hbar^2[j(j+1)-m(m-1)] = \hbar^2(j+m)(j-m+1)|C|^2$$

よって C を正に選べば

$$|jm-1\rangle = \frac{1}{\hbar\sqrt{(j+m)(j-m+1)}}J_-|jm\rangle$$

$$\langle jm-1|J_-|jm\rangle = \hbar\sqrt{(j+m)(j-m+1)}$$

この符号の決め方は全てが正であることからわかるように整合的である．これを次のように確認する．

$$|jm+1\rangle = \frac{1}{\hbar\sqrt{(j+m+1)(j-m)}}J_+|jm\rangle$$

よって

$$\left(|jm\rangle =\right)\frac{1}{\hbar\sqrt{(j+m+1)(j-m)}}J_-|jm+1\rangle$$

$$= \frac{1}{\hbar^2(j+m+1)(j-m)}J_-J_+|jm\rangle$$

$$= \frac{1}{\hbar^2(j+m+1)(j-m)}(\mathbf{J}^2-J_z(J_z+\hbar))|jm\rangle$$

$$= \frac{1}{(j+m+1)(j-m)}(j(j+1)-m(m+1))|jm\rangle$$

$$= \frac{(j-m)(j+m+1)}{(j+m+1)(j-m)}|jm\rangle = |jm\rangle$$

一方で $J_x^2+J_y^2 = \mathbf{J}^2-J_z^2$

$$\langle jm|(\mathbf{J}^2-J_z^2)|jm\rangle = \hbar^2[j(j+1)-m^2] = \langle jm|J_x^2|jm\rangle + \langle jm|J_y^2|jm\rangle \geqq 0$$

これから

$$j(j+1)\geqq m^2$$
$$-\sqrt{j(j+1)} \leqq m \leqq \sqrt{j(j+1)}$$

つまり m には最大と最小値がある．よって $J_\pm$ を作用させることにより m の異なる状態を構成していく手続きは何処かで終了する必要がある．よってその最大値と最小値を $m_1, -m_2$ とすれば

$$J_+|jm_1\rangle = 0$$

$$J_-|j\,-m_2\rangle = 0$$

となることを要求しよう．

$J_- J_+ = \mathbf{J}^2 - J_z(J_z + \hbar)$ より

$$\| J_+ | j m_1 \rangle \|^2 / \hbar^2 = j(j+1) - m_1(m_1+1)$$

$$= (j+m_1)(j-m_1) + j - m_1 = (j-m_1)(j+m_1+1) = 0$$

したがって $m_1 = j$ なので

$$J_+ | j j \rangle = 0 \quad ①$$

また，$J_+ J_- = \mathbf{J}^2 - J_z(J_z - \hbar)$ より

$$\| J_- | j\, m_2 \rangle \|^2 / \hbar^2 = j(j+1) + m_2(-m_2-1)$$

$$= (j+m_2)(j-m_2) + j - m_2 = (j-m_2)(j+m_2+1) = 0$$

これから $m_2 = j$ つまり

$$J_- | j\, {-j} \rangle = 0 \quad ②$$

①② より $|jm\rangle$ に対して $-j \leq m \leq j$

よって $\| | j j \rangle \| \neq 0$ である状態からはじめて

$$(J_-)^k | j j \rangle \propto | j\, j-k \rangle = | j\, {-j} \rangle,\ j - k = -j \quad (k = 0, 1, 2, \cdots)$$

を順に作ったとすると，これが無限に続かないためには 0 以上の整数 k に対して $j - k = -j$ とならなければならないので，$j = k/2 = 0, 1/2, 1, 3/2, \cdots$ が必要である．つまり角運動量は任意の値をとらず，量子化値のみをとる．

角運動量の量子化

> 角運動量は非負の整数もしくは半（奇）整数に $\boxed{\text{量子化}}$ される
>
> $$j = k/2 = 0, 1/2, 1, 3/2, \cdots$$

$$[\mathbf{J}^2, J_z] = 0 \qquad \mathbf{J}^2 | jm \rangle = \hbar^2 j(j+1) | jm \rangle$$

$$J_z | jm \rangle = \hbar m | jm \rangle$$

$j = 0, 1, 2, \cdots, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \cdots$ それぞれの j について

$$\underbrace{m = -j, -j+1, \cdots j-1, j}_{j-(-j-1) = 2j+1\ 個}$$ に量子化

$$\langle j\, m+1 | J_+ | j m \rangle = \hbar \sqrt{(j+m+1)(j-m)}$$

$$| j\, m+1 \rangle = \hbar^{-1} \left[\frac{(j+m+1)!}{(j+m)!} \frac{(j-m)!}{(j-(m+1))!} \right]^{-1/2} J_+ | jm \rangle$$

$$| j\, m+2 \rangle = \hbar^{-2} \left[\frac{(j+m+2)!}{(j+m)!} \frac{(j-m)!}{(j-(m+2))!} \right]^{-1/2} (J_+)^2 | jm \rangle$$

$$| j\, m+k \rangle = \hbar^{-k} \left[\frac{(j+m)!}{(j+m+k)!} \frac{(j-(m+k))!}{(j-m)!} \right]^{1/2} (J_+)^k | jm \rangle$$

$$\langle jm | (J_+)^{m-m'} | j m' \rangle = \hbar^{m-m'} \left[\frac{(j+m)!}{(j+m')!} \frac{(j-m')!}{(j-m)!} \right]^{1/2} ; (m > m')$$

また，$\langle j'm-1|J_-|j'm\rangle = \hbar\sqrt{(j'+m)(j'-m+1)}$

$$|j'm-1\rangle = \frac{1}{\hbar\sqrt{(j'+m)(j'-m+1)}} J_-|j'm\rangle$$

$$|j'm-2\rangle = \frac{1}{\hbar^2\sqrt{(j'+m)(j'+m-1)(j'-m+1)(j'-m+2)}} J_-^2|j'm\rangle$$

$$|j'm-k\rangle = \frac{1}{\hbar^k\sqrt{(j'+m)\cdots(j'+m-k+1)\cdot(j'-m+1)\cdots(j'-m+k)}}(J_-)^k|j'm\rangle$$

$$= \hbar^{-k}\left[\frac{(j'+m-k)!}{(j'+m)!}\frac{(j'-m)!}{(j'-(m-k))!}\right]^{1/2}(J_-)^k|j'm\rangle$$

$\left.\begin{array}{l} m \to m' \\ m-k \to m \end{array}\right) \to k \to m'-m$ (新しい m, m')

$$\langle j'm|(J_-)^{m'-m}|j'm'\rangle = \hbar^{m'-m}\left[\frac{(j'+m')!}{(j'+m)!}\frac{(j'-m)!}{(j'-m')!}\right]^{1/2},\ m<m'$$