5/19 第6回 201710848 有富光人

角運動量の量子化

$|jm+1\rangle = C J_+ |jm\rangle$ として規格化定数 C を決める.
$J_- J_+ = \mathbb{J}^2 - J_z (J_z + \hbar)$ より.

$$
\begin{aligned}
\langle jm+1 | jm+1 \rangle &= |C|^2 \langle jm | J_- J_+ | jm \rangle \\
&= \hbar^2 [\, j(j+1) - m(m+1) \,] |C^2| \\
&= \hbar^2 (j-m)(j+m+1) |C^2|
\end{aligned}
$$

C を正に選べば,

$$
|jm+1\rangle = \frac{1}{\hbar\sqrt{(j-m)(j+m+1)}} J_- |jm\rangle
$$

$$
\therefore \langle jm-1 | J_- | jm \rangle = \hbar\sqrt{(j+m)(j-m+1)}
$$

$$
J_x^2 + J_y^2 = \mathbb{J}^2 - J_z^2
$$

$$
\langle jm | (\mathbb{J}^2 - J_z^2) | jm \rangle = \hbar^2 [\, j(j+1) - m^2 \,]
$$

$$
\therefore -\sqrt{j(j+1)} \leq m \leq \sqrt{j(j+1)}
$$

$\rightarrow$ m には最大・最小値がある.

m の最大値を m_1，最小値を m_2 とすると，

$$J_+ |j\, m_1\rangle = 0$$
$$J_- |j\, -m_2\rangle = 0$$

$J_- J_+ = \mathbb{J}^2 - J_z(J_z + \hbar)$ より，

$$\begin{aligned}
\| J_+ |j\, m_1\rangle \|^2 / \hbar^2 &= j(j+1) - m_1(m_1+1) \\
&= (j+m_1)(j-m_1) + j - m_1 \\
&= (j-m_1)(j+m_1+1) \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\therefore\ m_1 = j \quad \rightarrow \quad J_+ |j\, j\rangle = 0$$

$J_+ J_- = \mathbb{J}^2 - J_z(J_z - \hbar)$ より，

$$\begin{aligned}
\| J_- |j\, -m_2\rangle \|^2 / \hbar^2 &= j(j+1) + m_2(-m_2-1) \\
&= (j+m_2)(j-m_2) + j - m_2 \\
&= (j-m_2)(j+m_2+1) \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\therefore\ m_2 = j \quad \rightarrow \quad J_- |j\, -j\rangle = 0$$

$\| |jj\rangle \| \neq 0$ からはじめて $(J_-)^k |jj\rangle \propto |jj-k\rangle$ を順につくったとする。これが無限に続かないためには 0 以上の整数 k に対して $j-k=-j$ とならなければならない。

$\longrightarrow j = \frac{k}{2} = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \cdots$

→ 角運動量は任意の値をとらず、量子化値のみをとる。

→ 角運動量は非負の整数もしくは半整数に量子化される。

$$\langle j\, m+1 | J_+ | j\, m \rangle = \hbar \sqrt{(j+m+1)(j-m)}$$

$$|j\, m+1\rangle = \hbar^{-1} \left[\frac{(j+m+1)!}{(j+m)!} \frac{(j-m)!}{(j-(m+1))!} \right]^{-\frac{1}{2}} J_+ |j\, m\rangle$$

$$|j\, m+2\rangle = \hbar^{-2} \left[\frac{(j+m+2)!}{(j+m)!} \frac{(j-m)!}{(j-(m+2))!} \right]^{-\frac{1}{2}} (J_+)^2 |j\, m\rangle$$

$$|j\, m+k\rangle = \hbar^{-k} \left[\frac{(j+m)!}{(j+m+k)!} \frac{(j-(m+k))!}{(j-m)!} \right]^{\frac{1}{2}} (J_+)^k |j\, m\rangle$$

$$\therefore \langle j\, m | (J_+)^{m-m'} | j\, m' \rangle = \hbar^{m-m'} \left[\frac{(j+m)!}{(j+m')!} \frac{(j-m')!}{(j-m)!} \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$|j\, m-k\rangle = \hbar^{-k} \left[\frac{(j+m-k)!}{(j+m)!} \frac{(j-m)!}{(j-(m-k))!} \right]^{\frac{1}{2}} (J_-)^k |j\, m\rangle$$

$$\therefore \langle j\, m | (J_-)^{m'-m} | j\, m' \rangle = \hbar^{m'-m} \left[\frac{(j+m')!}{(j+m)!} \frac{(j-m)!}{(j-m')!} \right]^{\frac{1}{2}}$$