$[J_x, J_y] = i\hbar J_z = -[J_y, J_x]$

量子力学3 第5回

201810861 高瀬皓介

- 角運動量の交換関係

角運動量 $\mathbb{J} = \begin{pmatrix} J_x \\ J_y \\ J_z \end{pmatrix}$ とは以下の関係性を満たす演算子とする

$$[J_i, J_j] = i\varepsilon_{ijk}\hbar J_k \quad \cdots ①$$

ここにおける $\mathbb{J} = \mathbb{L} (= \mathbb{r} \times \mathbb{p})$ である。これは次のようにも書ける

$$\mathbb{J} \times \mathbb{J} = i\hbar \mathbb{J}$$

これは①の両辺に ε_{ija} をかけることで導くことができる。

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{ija}[J_i, J_j] &= \varepsilon_{ija} J_i J_j - \varepsilon_{ija} J_j J_i \\
&= \varepsilon_{ija} J_i J_j - \varepsilon_{jia} J_i J_j \quad (\because i,j \text{ はただの文字だから、入れ換え可}) \\
&= \varepsilon_{ija} J_i J_j + \varepsilon_{ija} J_i J_j \\
&= 2\varepsilon_{ija} J_i J_j \\
&= 2\varepsilon_{ija} [J_i \times J_j] \\
\varepsilon_{ija}\, i\varepsilon_{ijk}\hbar J_k &= 2i\hbar\delta_{ak} J_k \\
&= 2i J_a \hbar
\end{aligned}$$

このとき、$\mathbb{a}, \mathbb{b}$ を任意のベクトルとして、

$$\begin{aligned}
[(\mathbb{a}\cdot\mathbb{J}), (\mathbb{b}\cdot\mathbb{J})] &= a_i b_j [J_i, J_k] \\
&= i\hbar\varepsilon_{ijk} a_i b_j J_k \\
&= i\hbar(\mathbb{a}\times\mathbb{b})\cdot\mathbb{J}
\end{aligned}$$

また、$\mathbb{J}^2$ は全角運動量とよばれ、$(\mathbb{J}^2 = J_x^2 + J_y^2 + J_z^2)$

$$[\mathbb{J}^2, \mathbb{J}] = 0$$

と $\mathbb{J}$ の各成分と可換である。

$$\left[\mathbb{J}^2, \begin{pmatrix} J_x \\ J_y \\ J_z \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} [\mathbb{J}^2, J_x] \\ [\mathbb{J}^2, J_y] \\ [\mathbb{J}^2, J_z] \end{pmatrix} = 0$$ ということ。

$$\begin{aligned}
\because [\mathbb{J}^2, J_i] &= [J_j J_j, J_i] \\
&= J_j \underbrace{[J_j, J_i]}_{i\hbar\varepsilon_{jik}J_k} + [J_j, J_i] J_j \\
&= i\varepsilon_{jik}\hbar(J_j J_k + J_k J_j) \\
&= 0
\end{aligned}$$

ただし、$\mathbb{J}$ の各成分どうしはお互いに可換ではないので、全てを同時対角化することはできない。そこで J_z を特別視して、(J_x, J_y も同様) $\mathbb{J}^2$ と J_z を同時対角化することを念頭に昇降演算子と呼ばれる演算子を定義する。

$$\begin{aligned}
J_\pm &= J_x \pm iJ_y \\
J_\pm^\dagger &= J_x^\dagger \pm iJ_y^\dagger \\
&= J_x \mp iJ_y \\
&= J_\mp
\end{aligned}$$

を定義する。

No.
Date

逆に解けば，

$$J_x = \frac{1}{2}(J_+ + J_-)$$
$$J_y = \frac{1}{2}(J_+ - J_-)$$

これらは次の関係式を満たす

$$[J^2, J_\pm] = 0$$

$$\because [J^2, J_\pm] = \underbrace{[J^2, J_x]}_{=0} \pm i \underbrace{[J^2, J_y]}_{=0} = 0$$

$$[J_z, J_\pm] = \pm\hbar(J_x \pm iJ_y) = \pm\hbar J_\pm$$

$$\because [J_z, J_\pm] = [J_z, J_x \pm iJ_y]$$
$$= [J_z, J_x] \pm i[J_z, J_y]$$
$$\left(\begin{array}{l} [J_x, J_y] = i\hbar J_z \\ [J_y, J_z] = i\hbar J_x \\ [J_z, J_x] = i\hbar J_y \end{array} \right)$$
$$= i\hbar J_y \pm i(-iJ_x\hbar)$$
$$= (\pm J_x + iJ_y)\hbar$$
$$= \pm\hbar(J_x \pm iJ_y)$$
$$= \pm\hbar J_\pm$$

$$[J_+, J_-] = 2\hbar J_z$$

$$\because [J_+, J_-] = [J_x + iJ_y, J_x - iJ_y]$$
$$= -i[J_x, J_y] + i[J_y, J_x]$$
$$= -i(i\hbar J_z) + i(-i\hbar J_z)$$
$$= 2\hbar J_z$$

• 昇降演算子

$$J_z|m\rangle = m\hbar|m\rangle$$
$$\langle m|J_z^+ = \langle m|J_z = m\hbar\langle m| \qquad * \ m : 実$$

まず，$[J_z, J_\pm] = \pm\hbar J_\pm$ を $\langle m|, |m'\rangle$ ではさむと，

$$\langle m|[J_z, J_\pm]|m'\rangle = \underbrace{\langle m|J_z}_{m\hbar\langle m|} J_\pm|m'\rangle - \langle m|J_\pm \underbrace{J_z|m'\rangle}_{|m'\rangle m'\hbar}$$

$$(m - m')\hbar\langle m|J_\pm|m'\rangle = \pm\hbar\langle m|J_\pm|m'\rangle$$

よって，$\langle m|J_\pm|m'\rangle$ は，

$$\langle m|J_\pm|m'\rangle = 0 \quad , \quad m \neq m' \pm 1$$

ex) $\langle 2|J_+|1\rangle \neq 0$，$\langle 1|J_-|2\rangle \neq 0$ など．

続いて，

$$J_z(J_+|m\rangle) = [J_z, J_+]|m\rangle + J_+J_z|m\rangle$$
$$= \hbar(m+1)(J_+|m\rangle) \qquad J_+|m\rangle \propto |m+1\rangle$$

つまり，J_+ は m が1つ増えた状態をつくる演算子である。

$$J_z(J_-|m\rangle) = (J_zJ_- - J_-J_z)|m\rangle + J_-J_z|m\rangle$$
$$= [J_z, J_-]|m\rangle + J_-|m\rangle m\hbar$$
$$= -J_-|m\rangle\hbar + J_-|m\rangle m\hbar$$
$$= (m-1)\hbar(J_-|m\rangle) \qquad J_-|m\rangle \propto |m-1\rangle$$

J_+とJ_-の場合をあわせると,

$$J_\pm|m\rangle \propto |m\pm1\rangle$$

$J_\pm$: mを±1変化させる演算子(昇降演算子)

$[J^2, J] = 0$. J_zを特別視して, $[J^2, J_z] = 0$

J^2とJ_zの同時固有状態を$|jm\rangle$とすると,

$$J^2|jm\rangle = \lambda_j^{J^2}|jm\rangle$$
$$J_z|jm\rangle = \lambda_m^{J_z}|jm\rangle$$

※一般に, エルミート演算子A, Bに対して, $[A,B]=0$ → 同時固有状態がとれる

$A|a\rangle = |a\rangle a$, $A|a'\rangle = |a'\rangle a'$, $a \neq a'$, a, a' : 実とすると,

↳ $\langle a'|A^\dagger = \langle a'|A = a'^*\langle a'| = a'\langle a'|$

$$0 = \langle a'|\underbrace{[A,B]}_{=0}|a\rangle = \langle a'|AB|a\rangle - \langle a'|BA|a\rangle$$
$$= a'\langle a'|B|a\rangle - \langle a'|B|a\rangle a$$
$$= (a'-a)\langle a'|B|a\rangle$$

$a' \neq a$より, $\langle a'|B|a\rangle = 0$ 固有値(異なる)a, a'に関するBの行列要素は0

Aの異なる固有値を$a_1, a_2, \cdots$, 固有状態$|a_1\rangle, |a_2\rangle, \cdots$とすると,

もしAに縮退がなければ,

$$\begin{bmatrix} \langle a_1| \\ \langle a_2| \\ \vdots \end{bmatrix} B\,[\,|a_1\rangle, |a_2\rangle, \cdots] = \begin{bmatrix} \langle a_1|B|a_1\rangle & \langle a_1|B|a_2\rangle & \cdots \\ \langle a_2|B|a_1\rangle & \langle a_2|B|a_2\rangle & \cdots \\ \langle a_3|B|a_1\rangle & \vdots & \ddots \\ \vdots & & \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \langle a_1|B|a_1\rangle & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & \langle a_2|B|a_2\rangle & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \langle a_3|B|a_3\rangle & \\ \vdots & \vdots & & \ddots \end{bmatrix} *$$

対角化されている($|a_1\rangle, |a_2\rangle, \cdots$ を基底とすればよい)

Aの固有値a_jに縮退がある一般の場合

$$* = \begin{array}{cl} \begin{bmatrix} * & 0 & 0 \\ 0 & * & 0 \\ 0 & 0 & * \end{bmatrix} & \begin{array}{l})\,a_1 \\ )\,a_2 \\ )\,a_3 \end{array} \end{array}$$

とブロック対角化されている。

→ ブロックごとに基底変換することを考える。

No.

Date

たとえば、a_jがn重に縮退しているとすると、

$$|a_j^1\rangle, \cdots\cdots, |a_j^m\rangle$$

$$** = \begin{bmatrix} \langle a_j^1|B|a_j^1\rangle & \langle a_j^1|B|a_j^2\rangle & \cdots \\ \langle a_j^2|B|a_j^1\rangle & \langle a_j^2|B|a_j^2\rangle & \cdots \\ \langle a_j^3|B|a_j^1\rangle & \vdots & \ddots \\ \vdots & & \\ \langle a_j^m|B|a_j^1\rangle & & \end{bmatrix}$$

→ エルミート行列！：これを対角化すればよい
対角化可能

一般の角運動量演算子の内積

$$J^1 \cdot J^2 = \frac{1}{2}(J_+^1 J_-^2 + J_-^1 J_+^2) + J_z^1 J_z^2$$

$$\because \quad [J_i^\alpha, J_j^\beta] = \delta_{\alpha\beta}\, i\hbar\, \varepsilon_{ijk} J_k^\alpha$$

$$J_x^\alpha = \frac{1}{2}(J_+^\alpha + J_-^\alpha)$$

$$J_y^\alpha = \frac{1}{2i}(J_+^\alpha - J_-^\alpha)$$

$$\begin{aligned} J^1 \cdot J^2 &= J_x^1 J_x^2 + J_y^1 J_y^2 + J_z^1 J_z^2 \\ &= \frac{1}{4}(J_+^1 + J_-^1)(J_+^2 + J_-^2) - \frac{1}{4}(J_+^1 - J_-^1)(J_+^2 - J_-^2) + J_z^1 J_z^2 \\ &= \frac{1}{2}(J_+^1 J_-^2 + J_-^1 J_+^2) + J_z^1 J_z^2 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} J^2 = \frac{1}{2}(J_+J_- + J_-J_+) + J_z^2 \\ J_z\hbar = \frac{1}{2}(J_+J_- - J_-J_+) \end{cases}$$

$\leftarrow [J_+, J_-] = 2\hbar J_z$,
$J_+J_- - J_-J_+ = 2\hbar J_z$

$$J^2 + J_z\hbar = J_+J_- + J_z^2$$

$$\begin{aligned} J_+J_- &= J^2 - J_z^2 + J_z\hbar \\ &= J^2 - J_z(J_z - \hbar) \end{aligned}$$

$$J^2 - J_z\hbar = J_-J_+ - J_z^2$$

$$\begin{aligned} J_-J_+ &= J^2 - J_z^2 - J_z\hbar \\ &= J^2 - J_z(J_z + \hbar) \end{aligned}$$

$$\begin{cases} J_+J_- = J^2 - J_z(J_z - \hbar) \\ J_-J_+ = J^2 - J_z(J_z + \hbar) \end{cases}$$