201810862 高梨宏介

角運動量の代数

角運動量の交換関数

前節の議論を少し一般に書いて、角運動量 $\boldsymbol{J} = \begin{pmatrix} J_x \\ J_y \\ J_z \end{pmatrix}$ とは以下の関係を満たす演算子としよう。

$[J_i, J_j] = i \varepsilon_{ijk} \hbar J_k$

もちろん $\boldsymbol{J} = \boldsymbol{L}$ は角運動量である。これは次のようにも書ける

$\boldsymbol{J} \times \boldsymbol{J} = i \hbar \boldsymbol{J}$ …(*)

このとき $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ を任意の(c-数の)ベクトルとして

$$[(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{J}), (\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{J})] = a_i b_j [J_i, J_k] = i \hbar \varepsilon_{ijk} a_i b_j J_k$$
$$= i \hbar (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{J}$$

$$(*) \cdots \varepsilon_{ija}[J_i, J_j] = \varepsilon_{ija} J_i J_j - \varepsilon_{ija} J_j J_i = \varepsilon_{ija} J_i J_j - \varepsilon_{jia} J_i J_j$$
$$= 2 \varepsilon_{ija} J_i J_j = 2(\boldsymbol{J} \times \boldsymbol{J})_a$$
$$i \varepsilon_{ija} \varepsilon_{ijk} J_k \cdot \hbar = 2 i \hbar \delta_{ak} J_k = 2 i \hbar J_a$$

また $\boldsymbol{J}^2$ は全角運動量とよばれ

$[\boldsymbol{J}^2, \boldsymbol{J}] = 0$

$$[\boldsymbol{J}^2, \begin{pmatrix} J_x \\ J_y \\ J_z \end{pmatrix}] = \begin{pmatrix} [\boldsymbol{J}^2, J_x] \\ [\boldsymbol{J}^2, J_y] \\ [\boldsymbol{J}^2, J_z] \end{pmatrix} = 0$$

と $\boldsymbol{J}$ の各成分と可換である

$$\because [\boldsymbol{J}^2, J_i] = [J_j J_j, J_i] = J_j [J_j, J_i] + [J_j, J_i] J_j = i\hbar \varepsilon_{jik} (J_j J_k + J_k J_j) = 0$$

$$\begin{pmatrix} i\hbar(\varepsilon_{jik} J_j J_k + \varepsilon_{jik} J_k J_j) \\ = i\hbar(\varepsilon_{jik} J_j J_k + \varepsilon_{kij} J_j J_k) \\ = i\hbar(\varepsilon_{jik} J_j J_k - \varepsilon_{jik} J_j J_k) \end{pmatrix}$$

ただし $\boldsymbol{J}$ の各成分ごとはお互いに可換ではないので、全てを同時対角化することはできない。そこで通常 J_z を特別視し $\boldsymbol{J}^2$ と J_z を同時対角化することを念頭に昇降演算子とよばれる次の演算子を定義する

$J_\pm = J_x \pm i J_y$

を定義する。逆に解けば

$J_x = \frac{1}{2}(J_+ + J_-)$

$J_y = \frac{1}{2i}(J_+ - J_-)$

これらは次の関係式を満たす

$[\vec{J}^2, J_\pm] = 0$

$[J_z, J_\pm] = \pm\hbar(J_x \pm iJ_y) = \pm\hbar J_\pm$

$[J_+, J_-] = 2\hbar J_z$

$\because [\vec{J}^2, J_\pm] = \overbrace{[\vec{J}^2, J_x]}^{=0} \pm i\overbrace{[\vec{J}^2, J_y]}^{=0} = 0$

$[J_z, J_\pm] = [J_z, J_x \pm iJ_y] = [J_z, J_x] \pm i[J_z, J_y]$

$\quad = i\hbar J_y \pm i(-i\hbar J_x)$

$[J_+, J_-] = [J_x + iJ_y, J_x - iJ_y] = -i[J_x, J_y] + i[J_y, J_x]$

昇降演算子

$J_z|m\rangle = m\hbar|m\rangle$

まず $[J_z, J_\pm] = \pm\hbar J_\pm$ を $\langle m|$, $|m'\rangle$ で挟めば

$(m - m')\hbar\langle m|J_\pm|m'\rangle = \pm\hbar\langle m|J_\pm|m'\rangle$

よって $\langle m|J_\pm|m'\rangle$ は

$\langle m|J_\pm|m'\rangle = 0 \quad , m \neq m' \pm 1$

続いて

$J_z(J_+|m\rangle) = [J_z, J_+]|m\rangle + J_+J_z|m\rangle = \hbar(m+1)J_+|m\rangle$

つまり J_+ は m が一つ増えた状態をつくる

上昇演算子となる $\qquad J_+|m\rangle \propto |m+1\rangle$

$J_z(J_-|m\rangle) = (J_zJ_- - J_-J_z)|m\rangle + J_-J_z|m\rangle$

$\quad = [J_z, J_-]|m\rangle + J_-m\hbar|m\rangle$

$\quad = -J_-|m\rangle\hbar + J_-m\hbar|m\rangle$

$\quad = \hbar(m-1)J_-|m\rangle \qquad J_-|m\rangle \propto |m-1\rangle$

あわせて $J_\pm|m\rangle \propto |m \pm 1\rangle$

$J_\pm$: m を ± 1 変化させる演算子

昇降演算子という

同時固有状態

$[\boldsymbol{J}^2, \boldsymbol{J}] = 0$ ，　J_z を特別視して $[\boldsymbol{J}^2, J_z] = 0$

$\boldsymbol{J}^2$ と J_z の同時固有状態を $|j\ m\rangle$ とする

$$\boldsymbol{J}^2 |j\ m\rangle = \lambda_j^{J^2} |j\ m\rangle$$

$$J_z |j\ m\rangle = \lambda_m^{J_z} |j\ m\rangle$$

一般にエルミート演算子 A, B に対して

$[A, B] = 0 \rightarrow$ 同時固有状態がとれる

$A|a\rangle = a|a\rangle$ ，$A|a'\rangle = a'|a'\rangle$ ，$a \neq a'$　a, a' : 実とすると

$$0 = \langle a' | [A, B] | a\rangle = \langle a' | A\ B | a\rangle - \langle a' | B\ A | a\rangle$$

$$= a' \langle a' | B | a\rangle - a \langle a' | B | a\rangle = (a' - a) \langle a' | B | a\rangle$$

$a' \neq a$ より $\langle a' | B | a\rangle = 0$　　異なる固有値 a, a' に関する B の行列要素は 0

A の異なる固有値を $a_1, a_2, \cdots$ ，固有状態を $|a_1\rangle, |a_2\rangle, \cdots$ ，

とすると，もし A に縮退がなければ

$$\begin{bmatrix} \langle a_1 | \\ \langle a_2 | \\ \vdots \end{bmatrix} B \left[|a_1\rangle, |a_2\rangle, \cdots \right] = \begin{bmatrix} \langle a_1|B|a_1\rangle & \langle a_1|B|a_2\rangle & \cdots \\ \langle a_2|B|a_1\rangle & \langle a_2|B|a_2\rangle & \cdots \\ \vdots & & \ddots \end{bmatrix} *$$

$$= \begin{bmatrix} \langle a_1|B|a_1\rangle & 0 & 0 \\ 0 & \langle a_2|B|a_2\rangle & \\ 0 & 0 & \ddots \end{bmatrix}$$

対角化されている．

A の固有値 a_j に縮退がある一般の場合

$$* = \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} * & 0 & 0 \\ 0 & * & 0 \\ 0 & 0 & * \end{bmatrix} & \begin{array}{l} \} a_1 \\ \} a_2 \\ \} a_3 \end{array} \end{array}$$

とブロック対角化されている．

⇒ブロックごとに基底変換することを考える．

たとえば a_j が n 重に縮退しているとすると

$|a_j^1\rangle, \cdots, |a_j^n\rangle$

$$** = \begin{bmatrix} \langle a_j^1|B|a_j^1\rangle & \langle a_j^1|B|a_j^2\rangle & \cdots \\ \langle a_j^2|B|a_j^1\rangle & \langle a_j^2|B|a_j^2\rangle & \cdots \\ \vdots & & \ddots \\ \langle a_j^n|B|a_j^1\rangle & & \end{bmatrix}$$

→エルミート行列：これを対角化すればよい

→対角化可能

一般の角運動量の内積

$$\vec{J}^1 \cdot \vec{J}^2 = \frac{1}{2}(J_+^1 J_-^2 + J_-^1 J_+^2) + J_z^1 J_z^2$$

$$\because \vec{J}^1 \cdot \vec{J}^2 = J_x^1 J_x^2 + J_y^1 J_y^2 + J_z^1 J_z^2$$

$$= \frac{1}{4}(J_+^1 + J_-^1)(J_+^2 + J_-^2) - \frac{1}{4}(J_+^1 - J_-^1)(J_+^2 - J_-^2) + J_z^1 J_z^2$$

$$= \frac{1}{2}(J_+^1 J_-^2 + J_-^1 J_+^2) + J_z^1 J_z^2$$

$$\vec{J}^2 = \frac{1}{2}(J_+ J_- + J_- J_+) + J_z^2 \quad , \quad [J_+, J_-] = J_+ J_- - J_- J_+ = 2\hbar J_z$$

$$J_z \hbar = \frac{1}{2}(J_+ J_- - J_- J_+)$$

$$\rightarrow \vec{J}^2 + J_z \hbar = J_+ J_- + J_z^2$$

$$J_+ J_- = \vec{J}^2 - J_z^2 + J_z \hbar = \vec{J}^2 - J_z(J_z - \hbar)$$

$$\vec{J}^2 - J_z \hbar = J_- J_+ + J_z^2$$

$$J_- J_+ = \vec{J}^2 - J_z^2 - J_z \hbar = \vec{J}^2 - J_z(J_z + \hbar)$$

まとめると

$$J_+ J_- = \vec{J}^2 - J_z(J_z - \hbar)$$

$$J_- J_+ = \vec{J}^2 - J_z(J_z + \hbar)$$