量子力学 第5回　　20181083４ 相原大地

角運動量の代数

いままで

$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$, $\vec{p} = -i\hbar\vec{\nabla}$ = 軌道角運動量

$[L_i, L_j] = i\hbar\epsilon_{ijk}L_k$

↓一般化

角運動量 $\vec{J} = \begin{pmatrix} J_x \\ J_y \\ J_z \end{pmatrix}$ を以下の交換関係をみたす演算子とする

$$[J_i, J_j] = i\epsilon_{ijk}\hbar J_k$$

$\vec{J} = \vec{L}$ は角運動量である。これは

$$\vec{J} \times \vec{J} = i\hbar\vec{J}$$

ともかける。

$(\because)$ $\epsilon_{ija}[J_i, J_j] = \epsilon_{ija}J_iJ_j - \epsilon_{jia}J_iJ_j$

$= 2\epsilon_{ija}J_iJ_j$

$= 2(\vec{J} \times \vec{J})_a$

$$i\epsilon_{ija}\epsilon_{ijk}\hbar J_k = 2i\hbar\delta_{ak}J_k = 2i\hbar J_a$$

$\vec{a}, \vec{b}$ を任意のC-数ベクトルとして,

$[(\vec{a}\cdot\vec{J}), (\vec{b}\cdot\vec{J})] = a_ib_j[J_i, J_j] = i\hbar\epsilon_{ijk}a_ib_jJ_k$

$= i\hbar(\vec{a} \times \vec{b})\cdot\vec{J}$

また, $\vec{J}^2 = J_x^2 + J_y^2 + J_z^2$ は全角運動量といい,

$$[\vec{J}^2, \vec{J}] = 0$$

$(\because)$ $[\vec{J}^2, J_i] = [J_jJ_j, J_i]$

$= J_j[J_j, J_i] + [J_j, J_i]J_j$

$= i\epsilon_{jik}(J_jJ_k + J_kJ_j) = 0$

ただし, $\vec{J}$の各成分どうしはお互いに可換ではないので, 全てを同時対角化できない。そこで通常J_zを特別視し, $\vec{J}^2$とJ_zを同時対角化することを念頭に昇降演算子を定義する

$$J_\pm \equiv J_x \pm iJ_y \quad (J_\pm^\dagger = J_x \mp iJ_y)$$

逆に解けば

$$J_x = \frac{1}{2}(J_+ + J_-)$$

$$J_y = \frac{1}{2i}(J_+ - J_-)$$

これらは以下をみたす

$$[\vec{J}^2, J_\pm] = 0$$
$$[J_z, J_\pm] = \pm\hbar(J_x \pm iJ_y) = \pm\hbar J_\pm$$
$$[J_+, J_-] = 2\hbar J_z$$

(∵) $[\vec{J}^2, J_\pm] = [\vec{J}^2, J_x] \pm i[\vec{J}^2, J_y] = 0$

$$[J_z, J_\pm] = [J_z, J_x] \pm i[J_z, J_y] = i\hbar J_y \mp i(i\hbar J_x)$$
$$= \pm\hbar(J_x \pm iJ_y) = \pm\hbar J_\pm$$
$$[J_+, J_-] = [J_x + iJ_y, J_x - iJ_y] = -i\underbrace{[J_x, J_y]}_{i\hbar J_z} + i\underbrace{[J_y, J_x]}_{-i\hbar J_z} = 2\hbar J_z$$

昇降演算子

$$J_z|m\rangle = m\hbar|m\rangle$$
$$\langle m|J_z = m\hbar\langle m| \qquad m\in\mathbb{R},\ J_z : \mathrm{Hermit}$$

$[J_z, J_\pm] = \pm\hbar J_\pm$ を $\langle m|$, $|m'\rangle$ ではさめば

$$\langle m|[J_z, J_\pm]|m'\rangle = \underbrace{\langle m|J_z}_{m\hbar\langle m|}J_\pm|m'\rangle - \langle m|J_\pm\underbrace{J_z|m'\rangle}_{m'\hbar|m'\rangle}$$

$$(m-m')\hbar\langle m|J_\pm|m'\rangle = \pm\hbar\langle m|J_\pm|m'\rangle$$
$$(m-m'\mp1)\langle m|J_\pm|m'\rangle = 0$$
$$\langle m|J_\pm|m'\rangle = 0,\quad m\neq m'\pm1 \quad \leftarrow \left(\begin{array}{l}\langle 2|J_+|1\rangle\neq0\\ \langle 1|J_-|2\rangle\neq0 \text{ など}\end{array}\right)$$

また,

$$J_z(J_+|m\rangle) = [J_z, J_+]|m\rangle + J_+J_z|m\rangle$$
$$= \hbar(m+1)(J_+|m\rangle) \qquad J_+|m\rangle \propto |m+1\rangle$$

つまり J_+ は m が一つ増えた状態をつくる上昇演算子

$$J_z(J_-|m\rangle) = [J_z, J_-]|m\rangle + J_-|m\rangle m\hbar$$
$$= (m-1)\hbar(J_-|m\rangle) \qquad J_-|m\rangle \propto |m-1\rangle$$

J_- : 下降演算子

あわせて $J_\pm|m\rangle \propto |m\pm1\rangle$

$J_\pm$ = m を ±1 変化させる昇降演算子

$\vec{J}^2$ と J_z の同時固有状態を $|j\ m\rangle$ とする

$$\begin{cases}\vec{J}^2|j\ m\rangle = \lambda_j^{J^2}|j\ m\rangle\\ J_z|j\ m\rangle = \lambda_m^{J_z}|j\ m\rangle\end{cases}$$

一般に Hermite op. A, B に対し $[A,B]=0 \to$ 同時固有状態がとれる

$A|a\rangle = a|a\rangle$, $A|a'\rangle = a'|a'\rangle$ $\quad a \neq a'$ $\quad a, a' \in \mathbb{R}$

$$\langle a'|A = a'^{\dagger}\langle a'| = a'\langle a'|$$

$$\underset{0}{\overset{\parallel}{0}} = \langle a'|[A,B]|a\rangle = \langle \underbrace{a'|A}_{a'\langle a'|}B|a\rangle - \langle a'|B\underbrace{A|a\rangle}_{a|a\rangle}$$

$$= (a'-a)\langle a'|B|a\rangle$$ 異なる固有値 a, a' に関する B の行列要素は 0

$a' \neq a$ より $\langle a'|B|a\rangle = 0$

A の異なる固有値を $a_1, a_2, \cdots$, 固有状態 $|a_1\rangle, |a_2\rangle, \cdots$ とすると.

もし A に縮退がなければ,

$$\begin{pmatrix} \langle a_1| \\ \langle a_2| \\ \vdots \end{pmatrix} B \left(|a_1\rangle, |a_2\rangle, \cdots\right) = \begin{pmatrix} \langle a_1|B|a_1\rangle & \langle a_1|B|a_2\rangle & \cdots \\ \langle a_2|B|a_1\rangle & \langle a_2|B|a_2\rangle & \cdots \\ \vdots & & \ddots \end{pmatrix} *$$

$$= \begin{pmatrix} \langle a_1|B|a_1\rangle & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & \langle a_2|B|a_2\rangle & 0 & \\ 0 & 0 & \langle a_3|B|a_3\rangle & \\ \vdots & & & \ddots \end{pmatrix}$$

$\to$ 対角化されている ($|a_1\rangle, |a_2\rangle, \cdots$ を基底とすればよい)

A の固有値 a_j に縮退がある一般の場合

$$\begin{array}{cl} * = \left(\begin{array}{c|c|c} * & 0 & 0 \\ \hline 0 & * & 0 \\ \hline 0 & 0 & * \end{array}\right) & \begin{array}{l} \}\,a_1 \\ \}\,a_2 \\ \}\,a_3 \end{array} \end{array}$$

とブロック対角化されている $\to$ ブロックごとに基底変換することを考える

例えば a_j が n 重に縮退しているとすると

$|a_j^1\rangle, \cdots, |a_j^n\rangle$

$$*_j = \begin{pmatrix} \langle a_j^1|B|a_j^1\rangle & \langle a_j^1|B|a_j^2\rangle & \cdots \\ \langle a_j^2|B|a_j^1\rangle & \langle a_j^2|B|a_j^2\rangle & \cdots \\ \vdots & & \ddots \\ \langle a_j^n|B|a_j^1\rangle & & \cdots \end{pmatrix} \to \underline{\text{Hermite 行列}}$$

(対角化可能).

$\Rightarrow$ これを対角化すればよい

一般の角運動量演算子の内積

$$\vec{J}^1 \cdot \vec{J}^2 = \frac{1}{2}(J_+^1 J_-^2 + J_-^1 J_+^2) + J_z^1 J_z^2$$

$$(\because)\ \vec{J}^1 \cdot \vec{J}^2 = J_x^1 J_x^2 + J_y^1 J_y^2 + J_z^1 J_z^2$$
$$= \frac{1}{4}(J_+^1 + J_-^1)(J_+^2 + J_-^2) - \frac{1}{4}(J_+^1 - J_-^1)(J_+^2 - J_-^2) + J_z^1 J_z^2$$
$$= \frac{1}{2}(J_+^1 J_-^2 + J_-^1 J_+^2) + J_z^1 J_z^2$$

$$\vec{J}^2 = \frac{1}{2}(J_+ J_- + J_- J_+) + J_z^2$$

$[J_+, J_-] = 2\hbar J_z$ より

$$J_z \hbar = \frac{1}{2}(J_+ J_- - J_- J_+)$$

$$\rightarrow \vec{J}^2 + J_z \hbar = J_+ J_- + J_z^2$$
$$J_+ J_- = \vec{J}^2 - J_z^2 + J_z \hbar$$
$$= \vec{J}^2 - J_z(J_z - \hbar)$$

$$\vec{J}^2 - J_z \hbar = J_- J_+ + J_z^2$$
$$J_- J_+ = \vec{J}^2 - J_z(J_z + \hbar)$$

$$\therefore\ J_+ J_- = \vec{J}^2 - J_z(J_z - \hbar)$$
$$J_- J_+ = \vec{J}^2 - J_z(J_z + \hbar)$$