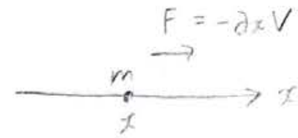
5/12 第4回 2018108869 永井ない

古典系での対称性と保存量との関係：ネーターの定理

解析力学の復習

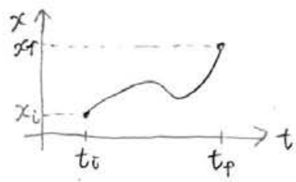
1D 保存力(ポテンシャル力)中の質点 質量m



$\boxed{F = ma}$, $a = \ddot{x} = \dfrac{d^2 x(t)}{dt^2}$, $F = -\partial_x V$

Newton eq

$t \in [t_i, t_f]$



$x = x(t)$ グラフ
世界線

"運動を定める"

① 初期値問題

$x(t_i) = x_0$, $\dot{x}(t_i) = v_0$, x_0, v_0: given
$\rightarrow x = x(t)$

t_i: 現在 $\rightarrow x = x(t)$ 未来を含めて定める

② 最小作用の原理

$$S[x(t)] \equiv \int_{t_i}^{t_f} dt\, L(x(t), \dot{x}(t))$$

$L(x, \dot{x})$: ラグランジュ関数 Lagrangian

Action 作用 (汎関数 functional)
関数 $\mapsto$ 数
cf. function 数$\mapsto$数

$\boxed{\delta S = 0}$ となる $x = x(t)$ が実現

$$\delta S = 0 \iff \boxed{\frac{\delta L}{\delta x} \equiv \frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = 0} \quad (\text{Euler-Lagrangian})$$

オイラー微分

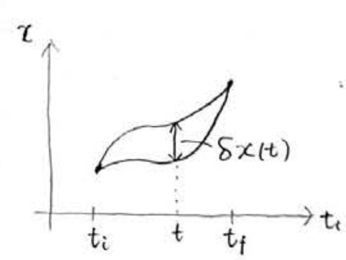
$\because\ dS = \int_{t_i}^{t_f} dt\, \delta L$ ($\delta x(t_i) = \delta x(t_f) = 0$: 端点はうごかさない)

($L(x, \dot{x})$)

$$= \int_{t_i}^{t_f} dt \left[\delta x \frac{\partial L}{\partial x} + \delta \dot{x} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right] \quad \text{部分積分}$$

$$= \int_{t_i}^{t_f} dt \left[\delta x \frac{\partial L}{\partial x} + \frac{d}{dt}\left(\delta x \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \delta x \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)\right]$$

$$= \underbrace{\delta x \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\Big|_{t_i}^{t_f}}_{=0\ \because \delta x(t_i) = \delta x(t_f) = 0} + \int_{t_i}^{t_f} dt\, \delta x \underbrace{\left[\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right]}_{\frac{\delta L}{\delta x}}$$



$$= \int_{t_i}^{t_f} dt\, \delta x \frac{\delta L}{\delta x}$$

$\delta x(t)$ は任意関数だから $\delta S = 0 \iff \dfrac{\delta L}{\delta x} = 0$

$F = -\partial_x V$ の時 $L = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - V$ とすればよい

$\because\ \dfrac{\partial L}{\partial x} = -\partial_x V$, $\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}$

$\dfrac{\partial L}{\partial x} = -\partial_x V - \dfrac{d}{dt} m\dot{x} = F - m\ddot{x} = 0 \iff F = m\ddot{x}$ Newton eq

ハミルトニアン形式へ(正準方程式へ)

$L(x, \dot{x})$ 独立変数 $(x, \dot{x})$

$\downarrow$

$H(x, p)$ 〃 (x, p) への変更 $p \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}$ $\left(L = \frac{1}{2}m\dot{x} - V \Rightarrow p = m\dot{x} \right)$

Legendre変換

$$\boxed{H \equiv \dot{x}p - L}$$

$$\delta H = \delta\dot{x}p + \dot{x}\delta p - \delta L = \delta\dot{x}p + \dot{x}\delta p - \frac{\partial L}{\partial x}\delta x - \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\delta\dot{x}$$

$$= \delta\dot{x}\underbrace{\left(p - \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)}_{=0} + \dot{x}\delta p - \frac{\partial L}{\partial x}\delta x = \dot{x}\delta p - \frac{\partial L}{\partial x}\delta x$$

Hはp, xの関数

$$\delta H = \dot{x}dp - \frac{\partial L}{\partial x}\delta x$$

よって正準方程式 $\begin{cases} \frac{\partial H}{\partial p} = \dot{x} \\ \frac{\partial H}{\partial x} = -\frac{\partial L}{\partial x} = -\dot{p} \end{cases}$ $\quad \frac{\delta L}{\delta x} = \frac{\partial L}{\delta x} - \frac{d}{dt}\overbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}}^{=p} = 0$

$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - V, \quad p = m\dot{x}$$

$$H = \dot{x}p - L = m\dot{x}^2 - \left(\frac{1}{2}m\dot{x}^2 - V\right) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + V = \frac{p^2}{2m} + V(x) \quad (xとpで書く)$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial p} &= \frac{p}{m} = \dot{x} \\ \frac{\partial H}{\partial x} &= \partial V = -\dot{p} \end{aligned}\right\} \rightarrow m\ddot{x} = -\partial V \quad \text{Newton eq.}$$

ネーターの定理

対称操作

空間並進 $\Leftrightarrow$ 運動量保存
時間推進 $\Leftrightarrow$ エネルギー保存
空間回転 $\Leftrightarrow$ 角運動量保存

} 量子論について既習
古典論でも成立 = ネーターの定理

(1次元の)空間並進

$x \mapsto x' = x + \delta a$ とLagrangianを変換, δaは無限小の定数 $\delta\dot{a} = 0$

$L'(x', \dot{x}') \equiv L(x, \dot{x})$ Lagrangianの変換の定義

$$S = \int_{t_i}^{t_f} dt\, L(x, \dot{x}) = \int_{t_i}^{t_f} dt\, L'(x', \dot{x}')$$

$$0 = \int_{t_i}^{t_f} dt \left\{ L'(x', \dot{x}') - L(x, \dot{x}) \right\}$$

Lが変換で不変とは!
$L'(x', \dot{x}') = L(x', \dot{x}')$
関数形が不変!

Lが不変なら

$$= \int_{t_i}^{t_f} dt \left\{ \underbrace{L(x', \dot{x}') - L(x, \dot{x})}_{\delta L} \right\} = \int_{t_i}^{t_f} dt\, \delta L$$

$$= \int_{t_i}^{t_f} dt \left\{ \delta x \frac{\partial L}{\partial x} + \delta \dot{x} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right\} = \int_{t_i}^{t_f} dt \left\{ \delta x \frac{\partial L}{\partial x} + \frac{d}{dt}\left(\delta x \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \delta x \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right\}$$

$$= \int_{t_i}^{t_f} dt \left\{ \frac{d}{dt} \underbrace{\left(\delta x \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right)}_{= G} + \delta x \frac{\delta L}{\delta x} \right\} = \int_{t_i}^{t_f} dt \frac{d}{dt} G = G \Big|_{t_i}^{t_f} = 0$$

運動方程式 $\frac{\delta L}{\delta x} = 0$

$G = \delta x \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \delta a \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}$ が保存量

$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = p$: 運動量が保存する。空間並進対称性の帰結!

例1　$L = \frac{1}{2} m \dot{x}^2$ 自由粒子系

$x \to x' = x + \delta a$ で L は不変 (x を含まない) $\to p = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}$ が保存

例2　内力で相互作用する N粒子系

$$L = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i \dot{\mathbb{r}}_i^2 - \sum_{i<j} V(\mathbb{r}_i - \mathbb{r}_j)$$

$L : \mathbb{r}_i \to \mathbb{r}_i' = \mathbb{r}_i + \delta \mathbb{a}$ で不変 (全体の並進)

すべての粒子の $r_{i,\mu}$ を δa_μ 増やす $\delta r_{i,\mu} = \delta a_\mu$

$$\sum_i \delta r_{i,\mu} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}_{i,\mu}} = \delta r_{i,\mu} \sum_i m_i \dot{r}_{i,\mu} = \delta a_\mu (\mathbb{P})_\mu$$ が保存、$\mathbb{P}$ が保存

μ成分

$\underset{\text{全運動量}}{\mathbb{P}} = \sum_i m_i \dot{\mathbb{r}}_i = \sum_i \mathbb{P}_i$, $\mathbb{P}_i = m_i \dot{\mathbb{r}}_i$

補足　$\mathbb{R} = \frac{1}{M} \sum m_i \mathbb{r}_i$ 重心とすると $\mathbb{r}_i = \mathbb{R} + \mathbb{R}_i$ として

$M = \sum m_i$

$$L = \underset{\text{変数を増やした}}{\tilde{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R}_1, \cdots, \mathbb{R}_N)} = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i (\dot{\mathbb{R}} + \dot{\mathbb{R}}_i)^2 + \sum_{i<j} V(\mathbb{R}_i - \mathbb{R}_j)$$

$\delta \mathbb{R} = \delta \mathbb{a}$ (定数) で $\tilde{L}$ は不変 ($\mathbb{R}$ を含まない)

$$\delta R_\mu \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{R}_\mu} = \delta R_\mu \sum_i m_i (\dot{R}_\mu + \dot{R}_{i,\mu}) = \delta a_\mu \sum_i m_i \dot{r}_{i,\mu}$$ が保存

$\mathbb{P} = \sum m_i (\dot{\mathbb{R}} + \dot{\mathbb{R}}_i) = \sum m_i \mathbb{P}_i$: 保存で不変

⊙ 一般に　$L(q_1, \cdots, q_f)$ が q_i を含まない $\to q_i \to q_i' = q_i + \delta a$

$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$ が保存する $\left(\frac{\delta L}{\delta q_i} = \underset{= 0}{\frac{\partial L}{\partial q_i}} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) = 0 \right)$ からも自明

q_i : 循環座標という

空間回転

$\mathbb{r} \to \mathbb{r}' = R\mathbb{r}$, $\tilde{R}R = E_3$ 回転操作

無限小回転：$R = E_3 + \delta R$ として $\delta\tilde{R} = -\delta R$ 反対称

$(\delta R)_{ij} = -\varepsilon_{ijk}\delta\omega_k$, δR , $\delta\omega$ 定数 $\delta\dot{R} = 0$, $\delta\dot{\omega} = 0$

$L'(\mathbb{r}', \dot{\mathbb{r}}') \equiv L(\mathbb{r}, \dot{\mathbb{r}})$ $\qquad \mathbb{r}' = \mathbb{r} + \delta R\mathbb{r}$

Lの回転不変性とは $L'(\mathbb{r}', \dot{\mathbb{r}}') = L(\mathbb{r}', \dot{\mathbb{r}}')$

or $L'(\mathbb{r}, \dot{\mathbb{r}}) = L(\mathbb{r}, \dot{\mathbb{r}})$) 引数は無関係 dummy

◦回転不変なLagrangianの例

$$L(\mathbb{r}, \dot{\mathbb{r}}) = \frac{1}{2}m\dot{\mathbb{r}}^2 - V(r) , \quad r = |\mathbb{r}| = \sqrt{\tilde{\mathbb{r}}\mathbb{r}}$$

$$= \frac{1}{2}m\tilde{\dot{\mathbb{r}}}\dot{\mathbb{r}} - V(r)$$

$$\because L'(\mathbb{r}, \dot{\mathbb{r}}) \equiv L(\tilde{R}\mathbb{r}, \tilde{R}\dot{\mathbb{r}})$$

$$= \frac{1}{2}m\tilde{\dot{\mathbb{r}}}R\tilde{R}\dot{\mathbb{r}} - V(r) = \frac{1}{2}m\tilde{\dot{\mathbb{r}}}\dot{\mathbb{r}} - V(r)$$

$$= L(\mathbb{r}, \dot{\mathbb{r}}) \quad (\text{確かに不変})$$

$$S = \int_{t_i}^{t_f} dt\, L'(\mathbb{r}', \dot{\mathbb{r}}') = \int_{t_i}^{t_f} L(\mathbb{r}, \dot{\mathbb{r}}) \text{ より}$$

$$0 = \int_{t_i}^{t_f} dt \left\{ L'(\mathbb{r}', \dot{\mathbb{r}}') - L(\mathbb{r}, \dot{\mathbb{r}}) \right\} \overset{\text{不変なら}}{=} \int_{t_i}^{t_f} dt \left\{ L(\mathbb{r}', \dot{\mathbb{r}}') - L(\mathbb{r}, \dot{\mathbb{r}}) \right\}$$

無限小変換→ $$= \int_{t_i}^{t_f} dt \left\{ L(\mathbb{r} + \delta\mathbb{r}, \dot{\mathbb{r}} + \delta\dot{\mathbb{r}}) - L(\mathbb{r}, \dot{\mathbb{r}}) \right\} = \int_{t_i}^{t_f} dt\, \delta L$$

$$= \int_{t_i}^{t_f} dt \left\{ \delta r_i \frac{\partial L}{\partial r_i} + \delta\dot{r}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{r}_i} \right\}$$

$$\delta\dot{r}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{r}_i} = \frac{d}{dt}\left(\delta r_i \frac{\partial L}{\partial \dot{r}_i}\right) - \delta r_i \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}_i}\right)$$

$$\boxed{G = \delta r_i \frac{\partial L}{\partial \dot{r}_i}}$$

$$= \int_{t_i}^{t_f} dt \left\{ \frac{d}{dt} G + \delta r_i \frac{\delta L}{\delta r_i} \right\} = 0$$

実際に起きる運動（Newton eq.をみたす：$\frac{\delta L}{\delta r_i} = 0$ Euler-Lagrange）なら

$$0 = \int_{t_i}^{t_f} dt \frac{d}{dt} G = G\big|_{t_f} - G\big|_{t_i}$$

$\therefore$ Gが保存 $G\big|_{t_f} = G\big|_{t_i}$

$$G = \delta r_i \frac{\partial L}{\partial \dot{r}_i} , \quad p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}_i} \text{ 運動量}$$

$= \delta\mathbb{r} \cdot \mathbb{p}$

$= (\delta\omega \times \mathbb{r}) \cdot \mathbb{p}$

$= (\mathbb{r} \times \mathbb{p}) \cdot \delta\omega$

$= \mathbb{L} \cdot \delta\omega$ が保存

$\delta\omega$は任意

$\mathbb{L} = \mathbb{r} \times \mathbb{p}$ 角運動量が保存

$$\delta r_i = (\delta R r)_i$$

$$= \delta R_{ij} r_j = -\varepsilon_{ijk}\delta\omega_k r_j$$

$$= \varepsilon_{ikj}\delta\omega_k r_j$$

$$= (\delta\omega \times \mathbb{r})_i$$

時間推進不変性

Lagrange形式　t: 独立変数 : 少していねいな議論が必要

一般に　変換 $t \to t'$

$q(t) \to q'(t')$　と変換する時　q: 一般化座標

$\dot{q}(t) \to \dot{q}'(t')$

$$L'(q', \dot{q}', t')dt' = L(q, \dot{q}, t)dt$$

$$S = \int_{t_i}^{t_f} dt\, L(q(t), \dot{q}(t), t) = \int_{t_i'}^{t_f'} dt'\, L'(q'(t'), \dot{q}'(t'), t')$$

2通りの表現

$$= \int_{t_i'}^{t_f'} dt\, L'(q'(t), \dot{q}'(t), t)$$ (変数を書き直した)

Lの不変性

$L'(q', \dot{q}', t') = L(q', \dot{q}', t')$　関数形が不変とすると

$$\int_{t_i}^{t_f} dt\, L(q, \dot{q}, t) = \int_{t_i'}^{t_f'} dt\, L(q', \dot{q}', t)$$ 引数はすべてt

注意
$$\frac{d}{d\tau}\int^{\tau} dt\, A(t) = A(\tau)$$
より
$$\delta \int^{\tau} dt\, A(t) = \delta\tau\, A(\tau)$$

$$\underbrace{\delta t_f L\Big|_{t_f} - \delta t_i L\Big|_{t_i}}_{= \left(\int_{t_i}^{t_f} dt \frac{d}{dt}(\delta t L)\right)} + \int_{t_i}^{t_f} dt\, \delta L = 0$$

$$\delta L = \delta q \frac{\partial L}{\partial q} + \delta \dot{q} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\delta q \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \delta q \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)$$

$$0 = \int_{t_i}^{t_f} dt \left[\frac{d}{dt}\left\{\delta t L + \delta q \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right\} + \delta q \frac{\delta L}{\delta q}\right]$$

$$\frac{\delta L}{\delta q} = \frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)$$

if (Newton eq. $\frac{\partial L}{\partial q} = 0$)

$$= \int_{t_i}^{t_f} dt \frac{d}{dt} G, \quad \boxed{G = \delta t L + \delta q \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}}$$

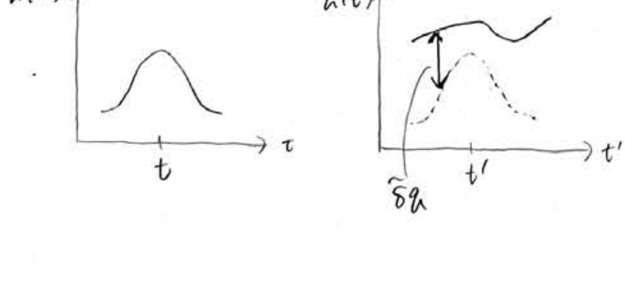
$$= G\Big|_{t_f} - G\Big|_{t_i}$$ Gが保存

注意

$\delta q(t) = q'(t) - q(t)$　同じ時間 (Lie微分)

c.f. $q'(t') = q(t) + \tilde{\delta} q$ の $\tilde{\delta} q$ とは異なる

$\tilde{\delta} q$: qの関数形の"変化"



時間推進にもどろう

$t \to t' = t + \delta t$

$q'(t') = q(t)$ 関数形は変えない　$L(q, \dot{q})$ のように時間を含まない $\to$ L は不変

$\parallel$

$q'(t+\delta t) = q'(t) + \delta t \dot{q}$ (微小量の1次)

よって　$\delta q = q'(t) - q(t) = -\delta t \dot{q}$

$$G = \delta t L + (-\delta t \dot{q}) \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \delta t \left\{ L - \dot{q} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right\} = \delta t \{ \underbrace{L - \dot{q} p}_{-H} \}$$

$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = p$

$= -\delta t H$ が保存

<u>エネルギー保存則</u>

まとめ

Lagrangian の不変性 $\to$ 保存則

空間推進 $\to$ 運動量保存
空間回転 $\to$ 角運動量保存　　$\Rightarrow$ 量子論と整合的
時間推進 $\to$ エネルギー保存