

回転操作

物理量の変換則

$$U = e^{i(\delta\lambda/\hbar)G} \Rightarrow \delta O = i\delta\lambda/\hbar [G, O]$$

次に物理量の変換則を確認しておく。まずは、座標演算子 $\mathbf{r}$ と考えよう。

$$G = -\delta W \cdot \mathbf{L} \quad (\text{パラメータ変換})$$

$$\begin{aligned} \delta r_i &= i[-\delta W \cdot \mathbf{L}/\hbar, r_i] = i\delta W_j \underbrace{[r_i, L_j/\hbar]}_{\text{内積}} \\ &= i\delta W_j \epsilon_{jke} r_k [r_i, p_e/\hbar] = -\delta W_j \epsilon_{jke} r_k \delta r_e = \epsilon_{jke} r_k p_e \delta W_j \\ &= -\delta W_j \epsilon_{jki} r_k = \epsilon_{ikj} r_k \delta W_j \end{aligned}$$

$$[r_i, p_e] = i\hbar \delta_{ie}$$

$$\text{つまり、} \delta \mathbf{r} = \mathbf{r} \times \delta \mathbf{W} = \boxed{-\delta \mathbf{W} \times \mathbf{r}} \quad \text{なり。}$$

$$\begin{aligned} \text{続いて、} \delta p_i &= i[-\delta W \cdot \mathbf{L}/\hbar, p_i] = i\delta W_j [-L_j/\hbar, p_i] \\ &= -i\delta W_j \epsilon_{jab} [r_a p_b, p_i]/\hbar = \delta W_j \epsilon_{jab} \delta a_i p_b \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \delta W_j \epsilon_{jib} p_b \quad [r_a, p_i] p_b \\ &\quad - \epsilon_{jib} \delta W_j p_b \quad " i\hbar \delta a_i \\ &= -(\delta \mathbf{W} \times \mathbf{p})_i \end{aligned}$$

$$\delta \mathbf{p} = \boxed{-\delta \mathbf{W} \times \mathbf{p}}$$

$$\delta \mathbf{r} = -\delta \mathbf{W} \times \mathbf{r}$$

$$\delta \mathbf{p} = -\delta \mathbf{W} \times \mathbf{p}$$

$$\delta \mathbf{L} = -\delta \mathbf{W} \times \mathbf{L}$$

$$\text{よって、} [L_i, L_j] = i\hbar (r_i p_j - r_j p_i)$$

$$\begin{aligned} [L_i, L_j] &= [\epsilon_{iab} r_a p_b, \epsilon_{jcb} r_c p_d] = \epsilon_{iab} \epsilon_{jcb} [r_a p_b, r_c p_d] = \epsilon_{iab} \epsilon_{jcd} [r_a [p_b, r_c p_d] + [r_a, r_c p_d] p_b] \\ &= i\hbar \epsilon_{iab} \epsilon_{jcd} \{-r_a \delta_{bc} p_d + r_c \delta_{ad} p_b\} = -i\hbar \epsilon_{iab} \epsilon_{jcd} r_a p_d + i\hbar \epsilon_{iab} \epsilon_{jcd} r_c p_b \\ &= i\hbar \epsilon_{iab} \epsilon_{jcd} r_a p_d - i\hbar \epsilon_{jba} \epsilon_{ica} r_c p_b = i\hbar (\delta_{ij} \delta_{ad} - \delta_{id} \delta_{aj}) r_a p_d - i\hbar (\delta_{ij} \delta_{bc} - \delta_{ic} \delta_{jb}) r_c p_b \\ &= i\hbar (\delta_{ij} \mathbf{r} \cdot \mathbf{p} - r_i p_i) - i\hbar (\delta_{ij} \mathbf{r} \cdot \mathbf{p} - r_j p_j) = i\hbar (r_i p_j - r_j p_i) \end{aligned}$$

一方 $\epsilon_{kij} \epsilon_{kab} = \delta_{ia} \delta_{jb} - \delta_{ib} \delta_{ja}$

$$\epsilon_{ijk} L_k = \epsilon_{ijk} \epsilon_{kab} r_a p_b = (\delta_{ia} \delta_{jb} - \delta_{ib} \delta_{ja}) r_a p_b = r_i p_j - r_j p_i$$

基本的

より

$$[L_i, L_j] = i\hbar \epsilon_{ijk} L_k$$

$$\delta L_i = -i [\delta W \cdot L / \hbar, L_i] = i \delta W_j [L_i, L_j / \hbar] = -\delta W_j \epsilon_{jik} L_k$$

つまり

$$\delta L = -\delta W \times L \quad \text{となる。}$$

$$\delta r = -\delta W \times r$$

$$\delta p = -\delta W \times p$$

$$\delta L = -\delta W \times L$$

r, p, L は全く同じ

変換則に従う! $\Rightarrow$

発想を逆にして

$$\delta V = -\delta W \times V \quad \text{となる}$$

$$V = \begin{bmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{bmatrix} \quad \text{という演算子}$$

物理量

ベクトル演算子

ベクトル演算子

一般に回転 R に対して $V = \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{pmatrix}$ という3成分の物理量(演算子)は

$$V' = \tilde{R} V, \quad R \in SO(3), \quad (\det R = 1, \quad \tilde{R} = R^{-1})$$

と変換するとき、 V をベクトル演算子と呼ぶ。特に無限小回転 δR に対しては
 $(\delta \tilde{R})_{ij} = \epsilon_{ijk} \delta W_k$ であるから、

$$\delta V_i = (\delta \tilde{R})_{ij} V_j = \epsilon_{ijk} \delta W_k V_j = -\epsilon_{ikj} \delta W_k V_j$$

$$\delta V_i = -\epsilon_{ikj} \delta W_k V_j, \quad \delta V = -\delta W \times V \quad \text{となる。}$$

前節までの議論から

$$\begin{cases} \delta r = -\delta W \times r \\ \delta p = -\delta W \times p \\ \delta L = -\delta W \times L \end{cases}$$

であり、 r, p, L は全てベクトル演算子となる。

ここで、無限小回転のユニタリ変換 $U = e^{-i\mathbf{S}\mathbf{W}\cdot\mathbf{L}/\hbar}$ に対しては V_i は一般論に従い次のように変換する。

$$\delta V_i = i[-\mathbf{S}\mathbf{W}\cdot\mathbf{L}/\hbar, V_i] = -(\lambda/\hbar) \delta U_i [L_j, V_i]$$

また、ベクトル演算子の定義を $\delta V_i = -\epsilon_{ijk} V_k \delta U_j$ と書いて、 δU_j が

任意であることに注意して係数と比べて次の交換子を得る。

ベクトル演算子と角運動量との交換子

$$[L_i, V_j] = \lambda \hbar \epsilon_{ijk} V_k$$

変換則或交換子
を定める!

$$\frac{1}{\lambda \hbar} [L_j, V_i] = -\epsilon_{ijk} V_k$$

$$[L_j, V_i] = -\lambda \hbar \epsilon_{ijk} V_k$$

$$[L_i, V_j] = -\lambda \hbar \epsilon_{jik} V_k = \lambda \hbar \epsilon_{ijk} V_k$$

なお、ベクトル量 V_1, V_2 の内積

$$V_1 \cdot V_2$$

などは、

$$(A \times B) \cdot C = (B \times C) \cdot A$$

$$\delta(V_1 \cdot V_2) = (\delta V_1) \cdot V_2 + V_1 \cdot (\delta V_2) = -(\mathbf{S}\mathbf{W} \times V_1) \cdot V_2 - V_1 \cdot (\mathbf{S}\mathbf{W} \times V_2)$$

$$= -(\mathbf{V}_1 \times \mathbf{V}_2) \cdot \mathbf{S}\mathbf{W} + \mathbf{S}\mathbf{W} \cdot (\mathbf{V}_1 \times \mathbf{V}_2) = 0$$

$$A \cdot (B \times C)$$

$$= B \cdot (A \times C)$$

となり、変換で不変なスカラー演算子となる。

$$\begin{aligned} \text{なお} \quad \delta(V_1 \cdot V_2) &= i[-\mathbf{S}\mathbf{W}\cdot\mathbf{L}/\hbar, (V_1 \cdot V_2)] = -i(\delta U_i/\hbar) [L_i, (V_1)_j (V_2)_j] \\ &= -i(\delta U_i/\hbar) \{ [L_i, (V_1)_j] (V_2)_j + (V_1)_j [L_i, (V_2)_j] \} \\ &= \delta U_i \epsilon_{ijk} \{ (V_1)_k (V_2)_j + (V_1)_j (V_2)_k \} = 0 \end{aligned}$$

よって、自由粒子のハミルトニアン $H_0 = \frac{p^2}{2m}$ 、水素類似原子のハミルトニアン

$$H_{\text{hyd}} = H_0 + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Z}{r}, \quad \text{3次元調和振動子のハミルトニアン} \quad H_{\text{osc}} = H_0 + \frac{1}{2} m \omega^2 r^2$$

などは、回転対称性を持ち、角運動量を保存する。

$$r = \sqrt{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}}$$