$U = e^{i(\delta\lambda/\hbar)G}$

$\Rightarrow \delta\mathcal{O} = i\delta\lambda/\hbar\,[G, \mathcal{O}]$

No. 7

Date 5 · 8 · 金

次に物理量の変換則を確認しておこう。まずは座標演算子 $\mathbb{r}$ を考える

$$G = -\delta\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbb{L}$$

$$\delta r_i = i[-\delta\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbb{L}/\hbar, r_i] = i\delta\omega_j[r_i, L_j/\hbar]$$
$$= i\delta\omega_j\varepsilon_{jkl}r_k[r_i, p_l/\hbar] = -\delta\omega_j\varepsilon_{jkl}r_k\delta_{il}$$
$$= -\delta\omega_j\varepsilon_{jki}r_k = \varepsilon_{ikj}r_k\delta\omega_j$$

$L_j = (\mathbb{r}\times\mathbb{p})_j$
$= \varepsilon_{jkl}r_kp_l$

$[r_i, p_l] = i\hbar\delta_{il}$

つまり. $\delta\mathbb{r} = \mathbb{r}\times\delta\boldsymbol{\omega} = \underline{-\delta\boldsymbol{\omega}\times\mathbb{r}}$ となる

続いて. $\delta p_i = i[-\delta\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbb{L}/\hbar, p_i] = i\delta\omega_j[-L_j/\hbar, p_i]$
$$= -i\delta\omega_j\varepsilon_{jab}[r_ap_b, p_i]/\hbar = \delta\omega_j\varepsilon_{jab}\delta_{ai}p_b$$
$$= \delta\omega_j\varepsilon_{jib}p_b = -\varepsilon_{ijb}\delta\omega_jp_b$$

$$\therefore\ \delta\mathbb{p} = \underline{-\delta\boldsymbol{\omega}\times\mathbb{p}}$$

$\delta\mathbb{L} = -\delta\boldsymbol{\omega}\times\mathbb{L}$

これも成り立ちそうである

ここで

$$[L_i, L_j] = i\hbar(r_ip_j - r_jp_i)$$

$$[L_i, L_j] = [\varepsilon_{iab}r_ap_b, \varepsilon_{jcd}r_cp_d] = \varepsilon_{iab}\varepsilon_{jcd}[r_ap_b, r_cp_d]$$
$$= \varepsilon_{iab}\varepsilon_{jcd}\{r_a[p_b, r_cp_d] + [r_a, r_cp_d]p_b\}$$
$$= i\hbar\varepsilon_{iab}\varepsilon_{jcd}\{-r_a\delta_{bc}p_d + r_c\delta_{ad}p_b\} = -i\hbar\varepsilon_{iab}\varepsilon_{jbd}r_ap_d + i\hbar\varepsilon_{iab}\varepsilon_{jca}r_cp_b$$
$$= i\hbar\varepsilon_{iab}\varepsilon_{jdb}r_ap_d - i\hbar\varepsilon_{iba}\varepsilon_{jca}r_cp_b = i\hbar(\delta_{ij}\delta_{ad} - \delta_{id}\delta_{aj})r_ap_d$$
$$- i\hbar(\delta_{ij}\delta_{bc} - \delta_{ic}\delta_{jb})r_cp_b$$

↑ アインシュタインの縮約 (No.6 参照)

$$= i\hbar(\delta_{ij}\mathbb{r}\cdot\mathbb{p} - r_jp_i) - i\hbar(\delta_{ij}\mathbb{r}\cdot\mathbb{p} - r_ip_j) = i\hbar(r_ip_j - r_jp_i)$$

一方.

$\varepsilon_{kij}\varepsilon_{kab}$ (kについての縮約をとる)

$$\varepsilon_{ijk}L_k = \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{kab}r_ap_b = (\delta_{ia}\delta_{jb} - \delta_{ib}\delta_{ja})r_ap_b = r_ip_j - r_jp_i$$

よって

$$[L_i, L_j] = i\hbar\varepsilon_{ijk}L_k$$
$$\delta L_i = -i[\delta\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbb{L}/\hbar, L_i] = i\delta\omega_j[L_i, L_j/\hbar] = -\delta\omega_j\varepsilon_{ijk}L_k$$

つまり

$$\delta\mathbb{L} = -\delta\boldsymbol{\omega}\times\mathbb{L}$$

$$\begin{cases}\delta\mathbb{r} = -\delta\boldsymbol{\omega}\times\mathbb{r}\\ \delta\mathbb{p} = -\delta\boldsymbol{\omega}\times\mathbb{p}\\ \delta\mathbb{L} = -\delta\boldsymbol{\omega}\times\mathbb{L}\end{cases}$$

$\mathbb{r}, \mathbb{p}, \mathbb{L}$ は全く同じ変換則に従う! $\Rightarrow$

発想を逆にして!

$\delta\mathbb{V} = -\delta\boldsymbol{\omega}\times\mathbb{V}$

となる

$\mathbb{V} = \begin{pmatrix}V_x\\V_y\\V_z\end{pmatrix}$ という

物理量演算子を定義

‖

ベクトル演算子

一般に回転Rに対して $\mathbb{V}=(V_x, V_y, V_z)$ という3成分の物理量(演算子)は

$$\mathbb{V}'=\tilde{R}\mathbb{V}, \quad R\in SO(3), \ (\det R=1, \ \tilde{R}=R^{-1}) \quad (\delta\tilde{R}=-\delta R)$$

と変換するとき、$\mathbb{V}$ をベクトル演算子と呼ぶ。特に無限小回転に対しては

$(\delta\tilde{R})_{ij}=\varepsilon_{ijk}\delta\omega_k$ であるから

$$\delta V_i=\underbrace{-\varepsilon_{ikj}\delta\omega_k}_{(\delta\tilde{R})_{ij}=\varepsilon_{ijk}\delta\omega_k} V_j, \quad \delta\mathbb{V}=-\delta\omega\times\mathbb{V}$$

となる。前節までの議論から

$$\delta\mathbb{r}=-\delta\omega\times\mathbb{r}$$
$$\delta\mathbb{p}=-\delta\omega\times\mathbb{p}$$
$$\delta\mathbb{L}=-\delta\omega\times\mathbb{L}$$

であり、$\mathbb{r}$, $\mathbb{p}$, $\mathbb{L}$ は全て、ベクトル演算子となる。

ここで、無限小回転のユニタリ変換 $U=e^{-i\delta\omega\cdot\mathbb{L}/\hbar}$ に対して V_i は一般論に従い、次のように変換する。

$$\delta V_i=i[-\delta\omega\cdot\mathbb{L}/\hbar, V_i]=-(i/\hbar)\delta\omega_j[L_j, V_i]$$

また ベクトル演算子の定義を $\delta V_i=-\varepsilon_{ijk}V_k\delta\omega_j$ と書いて、$\delta\omega_j$ が任意であることに注意して、係数を比べて次の交換子を得る。

$$\frac{1}{i\hbar}[L_j, V_i]=-\varepsilon_{ijk}V_k$$

$$[L_j, V_i]=-i\hbar\varepsilon_{ijk}V_k$$
$$[L_i, V_j]=-i\hbar\varepsilon_{jik}V_k=i\hbar\varepsilon_{ijk}V_k$$

ベクトル演算子と角運動量との交換子

$$\boxed{[L_i, V_j]=i\hbar\varepsilon_{ijk}V_k}$$

変換則が交換子を定める

なお、ベクトル量の内積

$$\mathbb{V}_1\cdot\mathbb{V}_2$$

などは

$$\delta(\mathbb{V}_1\cdot\mathbb{V}_2)=(\delta\mathbb{V}_1)\cdot\mathbb{V}_2+\mathbb{V}_1\cdot\delta\mathbb{V}_2=-(\delta\omega\times\mathbb{V}_1)\cdot\mathbb{V}_2-\mathbb{V}_1\cdot(\delta\omega\times\mathbb{V}_2)$$
$$=-(\mathbb{V}_1\times\mathbb{V}_2)\cdot\delta\omega+\delta\omega\cdot(\mathbb{V}_1\times\mathbb{V}_2)=0$$

となり 変換で不変なスカラー演算子となる。なお

$$
\begin{aligned}
\delta(\mathbb{V}_1\cdot\mathbb{V}_2) &= i[-\delta\omega\cdot\mathbb{L}/\hbar, (\mathbb{V}_1\cdot\mathbb{V}_2)] = -i(\delta\omega_i/\hbar)[L_i, (V_1)_j(V_2)_j] \\
&= -i(\delta\omega_i/\hbar)\{[L_i, (V_1)_j](V_2)_j + (V_1)_j[L_i, (V_2)_j]\} \\
&= \delta\omega_i\,\varepsilon_{ijk}\{(V_1)_k(V_2)_j + (V_1)_j(V_2)_k\} = 0
\end{aligned}
$$

よって自由粒子系のハミルトニアン $H_0 = \underset{\sim}{\mathbb{p}^2}/2m$，水素類似原子のハミルトニアン $H_{hyd} = H_0 + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Z}{\underset{\sim}{r}}$，3次元調和振動子のハミルトニアン $H_{osc} = H_0 + \frac{1}{2}m\omega^2\underset{\sim}{\mathbb{r}^2}$ などは回転対称性を持ち，角運動量を保存する。

$r = \sqrt{\mathbb{r}\cdot\mathbb{r}}$

$\sim$ は全部内積