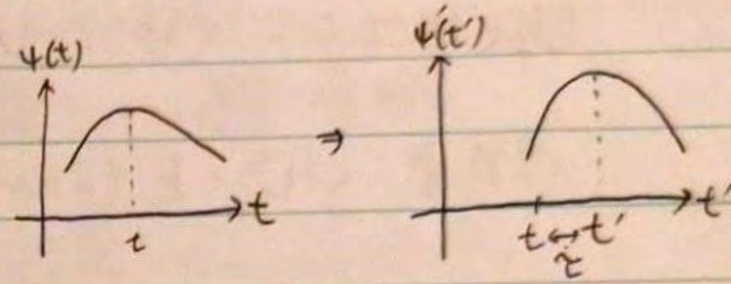
5/1

1.2 保存則の具体例

☆ 対称操作と保存則に関する相互関係の具体例を示す。

1.2.1 時間推進とエネルギー

時間間隔τの時間推進T_τ



$$t \to t' = T_\tau t = t + \tau$$
$$\psi(t) \to \psi(t) = U_\tau \psi(t)$$

とすれば $\psi'(t') = \psi(t)$ より

$$\psi'(t) = \psi(t - \tau) = U_\tau \psi(t)$$

τを無限小とすると

$$\psi(t - \delta\tau) = \psi(t) - \delta\tau\, \partial_t \psi$$
$$\delta\psi = \psi(t - \delta\tau) - \psi(t) = -\delta\tau\, \partial_t \psi$$

シュレディンガー方程式を使えば ($i\hbar\partial_t\psi = H\psi$)

$$\delta\psi = -\delta t\,\partial_t\psi = -\delta t\cdot\frac{H\psi}{i\hbar} = i\delta t H\psi/\hbar$$

時間推進

時間推進の演算子の母関数はハミルトニアンである。

$$U_{\delta t} = e^{+iH\delta t/\hbar}$$

時間に依存しないハミルトニアンはそれ自身と可換 ($[H,H]=0$) であり、よって時間に依存しないハミルトニアンで記述される系はエネルギーを保存量とする。

※ δt が無限小であることから、exp の肩に乗せてよく、$\delta\psi$ を e の肩に乗せる。
$U_{\delta t}$はユニタリ行列で $U_{\delta t}^{\dagger} = U_{\delta t}^{-1}$ となる。

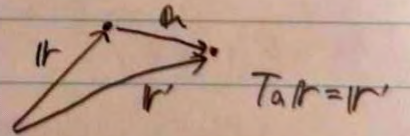
保存量 $\langle H\rangle = E$ (エネルギー)

系が対称である。

まとめると、一般論に従って、時間推進で系は不変である(=ハミルトニアンが時間推進で不変である)と仮定すると、そこから、エネルギー保存則が得られた。

1.2.2 空間推進と運動量

3次元の空間推進 a を考える。



$$\mathbf{r} \to \mathbf{r}' = \mathbf{r} + a$$
$$\psi \to \psi'$$

$\psi'(\mathbf{r}') = \psi(\mathbf{r})$ より

$$\psi'(\mathbf{r}) = \psi(\mathbf{r} - a)$$

$\boldsymbol{a}$を無限小として（$=a$の1次まで展開）

$$\psi(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{a}) \simeq \psi(\boldsymbol{r}) - \boldsymbol{a}\cdot\nabla\psi$$

$$\delta\psi = \psi' - \psi = -\boldsymbol{a}\cdot\nabla\psi = i\boldsymbol{a}\cdot(i\hbar\nabla\psi)/\hbar = -i\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{p}\psi/\hbar$$

となる。（$\boldsymbol{p} = -i\hbar\nabla$）

空間推進

> 空間推進の~~母~~関数は運動量である。
>
> $$U_{\delta\boldsymbol{a}} = e^{-i\delta\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{p}/\hbar}$$
>
> 空間推進で不変（並進対称性を持つ）系では運動量は保存する。

※例）東京とロンドンで運動法則が同じ → 運動量保存

例えば、自由空間（場の影響受けないような空間）でのハミルトニアン、

$$H_0 = \boldsymbol{p}^2/2m$$

は、

$$[H, \boldsymbol{p}] = 0$$

であるから、自由粒子系は空間推進で不変であり（＝並進対称性をもつ）、運動量が保存する。

・観測量の変換の例を見ていく。

一般論：一般のユニタリ変換 $U = e^{i\delta\lambda G/\hbar}$、$\delta\lambda$で書ける無限小変換において
ある物理量 $\mathcal{O}$ はどのように変換するか。
→ $\delta\mathcal{O} = i\delta\lambda[G, \mathcal{O}]/\hbar$ を計算すれば求まる。

〈並進操作〉

$U = T_{\delta a} = e^{-i\delta a \cdot p/\hbar}$ として δa を無限小のパラメータとすれば.

$$G = -\delta a \cdot p$$

$$\delta r_i = i[-\delta a \cdot p/\hbar, r_i] = i\delta a_j [r_i, p_j/\hbar] = -\delta a_i$$

※ ここで $[r_i, p_j] = i\hbar\delta_{ij}$ を用いた。

$\Downarrow$

$$\delta r = -\delta a$$

つまり.

$$r \to r' = r - \delta a$$

となることを意味する. これは.

$$\psi'(r) = \psi(r - \delta a)$$

と整合的である。

※ $\langle \psi' | x' | \psi' \rangle = \langle \psi | x | \psi \rangle$ ($\because \psi'(x') = \psi(x)$) と理由.

$$\langle \psi' | x' | \psi' \rangle = \int dx\, \psi'(x)\, x'\, \psi'(x)$$

$$= \int dx\, \psi(x - \delta a)(x - \delta a)\psi(x - \delta a)$$

$x - \delta a \equiv x$
$\hookrightarrow dx = dx$

$$= \int dx\, \psi(x)\, x\, \psi(x) = \langle \psi | x | \psi \rangle$$

同様にすると.

$$\delta p = -i[\delta a \cdot p, p] = 0$$

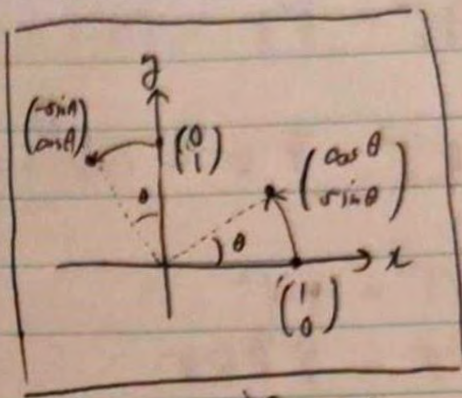
と、運動量は並進で不変であるとわかる.

1.2.3 空間回転と角運動量

・"回転"という変換操作に対応する母関数が"角運動量"となる。

2次元回転の場合

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$



超わかりやすい!!

3次元回転

原点周りの回転Rによる変換を考える。Rは3×3の実行列で、

$$\mathbb{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \to \mathbb{r}' = R\mathbb{r}$$

c.f. z軸を軸とする回転なら、$R = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ とかである

☆ $\mathbb{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ に対して $\tilde{\mathbb{r}} = (x\ y\ z)$: 転置、$\tilde{\bigcirc}$ ←チルダー

行列Aに対して $(\tilde{A})_{ij} = A_{ji}$

・$\widetilde{AB} = \tilde{B}\cdot\tilde{A}$ ∵ $(\widetilde{AB})_{ij} = (AB)_{ji} = A_{jk}\cdot B_{ki}$

$$= \tilde{B}_{ik}\cdot\tilde{A}_{kj}$$

$$= (\tilde{B}\cdot\tilde{A})_{ij}$$

回転はベクトルの大きさを不変にするので、

$$|\mathbb{r}|^2 = \tilde{\mathbb{r}}\mathbb{r} = (x\ y\ z)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$|\mathbb{r}'|^2 = \tilde{\mathbb{r}}'\mathbb{r}' = (\widetilde{R\mathbb{r}})R\mathbb{r} = \tilde{\mathbb{r}}\tilde{R}R\mathbb{r}$$

$$|\mathbb{r}|^2 = |\mathbb{r}'|^2$$

$$\tilde{\mathbb{r}}\mathbb{r} = \tilde{\mathbb{r}}\tilde{R}R\mathbb{r}$$ → $\tilde{R}R$ の部分が単位行列でなければならない

より $\tilde{R}R = E_3$, $\tilde{R} = R^{-1}$.

であることを要求する。この条件満たす行列を直交行列といい、

$$O(3)$$

と書く。

また

$$\det \tilde{R}R = \det\tilde{R}\det R = (\det R)^2$$
$$= \det E_3 = 1.$$

$$\det R = \pm 1$$

となる。

この回転という操作が単位行列から連続につながる、

すなわち"何もしないという回転"から連続に変形できるような回転

のみを考えると $\det E_3 = 1$ なので (急に $\det R = -1$ になるようなことはないから)

$\det R = 1$ となる。これを $SO(3)$ と呼ばれる。

・次に無限小変換 (=無限小の回転) について考える。

無限小変換は R が単位行列に近い (なにもしないという回転) 場合に対応

$$R = E_3 + \delta R$$

とすると、

$$\tilde{R}R = \widetilde{(E_3+\delta R)}(E_3+\delta R) = (E_3+\tilde{\delta R})(E_3+\delta R)$$
$$= E_3 + E_3\delta R + \tilde{\delta R}E_3 + \tilde{\delta R}\delta R$$

$\tilde{\delta R}\delta R$を無視すると

$$\tilde{R}R = E_3 + \delta R + \tilde{\delta R}$$
$$= E_3$$

より、 $\delta R + \tilde{\delta R} = 0$

$$\tilde{\delta R} = -\delta R$$

転置をとるとマイナスになる行列を"反対称"とよぶ。$(\delta R_{ij} = -\delta R_{ji})$

この場合、$\delta R_{ii} = -\delta R_{ii} \rightarrow \delta R_{ii} = 0$ となるので具体的には

$$\delta R = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix}$$

$(\delta R)_{ij} = -\epsilon_{ijk}\delta\omega_k$ とする。

⚠ ϵ_{ijk}：エディングトンのイプシロン

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & (ijk) = (1\,2\,3), (2\,3\,1)(3\,1\,2) \\ -1 & (ijk) = (1\,3\,2), (3\,2\,1)(2\,1\,3) \\ 0 & \text{それ以外。}((1\,1\,2)\text{など}) \end{cases}$$

：サイクリックパーミュテーション（巡回的入替）

$$-\epsilon_{ijk}\delta\omega_k = -\varepsilon_{ij1}\delta\omega_1 - \varepsilon_{ij2}\delta\omega_2 - \varepsilon_{ij3}\delta\omega_3$$

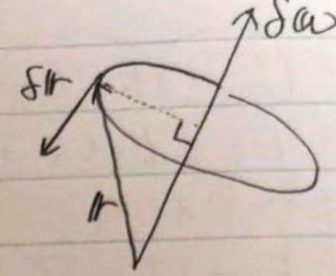
よって

$$(\delta \mathbf{r})_i = (\delta R\mathbf{r})_i = (\delta R)_{ij}r_j = -\epsilon_{ijk}\delta\omega_k r_j$$
$$= \epsilon_{ikj}\delta\omega_k r_j$$
$$= (\delta\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r})_i$$

※ $(\mathbb{A}\times\mathbb{B})_i = \epsilon_{ijk}A_jB_k$ より。

従って

$$\delta\mathbb{r} = \delta\boldsymbol{\omega} \times \mathbb{r}$$



これは、$\mathbb{r}$を$\delta\boldsymbol{\omega}$軸まわりに$\delta\boldsymbol{\omega}$を右ねじが進む向きとして
$|\delta\boldsymbol{\omega}|$だけねじの回転する方向に回転することを意味する。

ここで、

$$\psi'(R\mathbb{r}) = \psi(\mathbb{r})$$
$$\psi'(\mathbb{r}) = \psi(R^{-1}\mathbb{r})$$

$$\delta\psi = \psi'(\mathbb{r}) - \psi(\mathbb{r}) = \psi(R^{-1}\mathbb{r}) - \psi(\mathbb{r})$$
$$= \psi(\mathbb{r} - \delta R\mathbb{r}) - \psi(\mathbb{r}) = \psi(\mathbb{r} - \delta\mathbb{r}) - \psi(\mathbb{r})$$
$$= -(\delta\mathbb{r})\cdot\nabla\psi$$
$$= -(\delta\boldsymbol{\omega} \times \mathbb{r})\cdot\nabla\psi$$

〈ここで、$\mathbb{A}\cdot(\mathbb{B}\times\mathbb{C}) = \mathbb{B}\cdot(\mathbb{C}\times\mathbb{A}) = \mathbb{C}\cdot(\mathbb{A}\times\mathbb{B}) = (\mathbb{A}\times\mathbb{B})\cdot\mathbb{C}$〉

$$(-\delta\boldsymbol{\omega}\times\mathbb{r})\cdot\nabla\psi = -\delta\boldsymbol{\omega}\cdot(\mathbb{r}\times\nabla)\psi$$

〈ここで $\mathbb{P} = -i\hbar\nabla$ より $\nabla = i\mathbb{P}/\hbar$〉

$$-\delta\boldsymbol{\omega}\cdot(\mathbb{r}\times\nabla)\psi = -i\delta\boldsymbol{\omega}\cdot(\mathbb{r}\times\mathbb{P})\psi/\hbar$$

〈ここで $\mathbb{L} = \mathbb{r}\times\mathbb{P}$〉

$$-i\delta\boldsymbol{\omega}\cdot(\mathbb{r}\times\mathbb{P})\psi/\hbar = -i\delta\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbb{L}\psi/\hbar$$

$$\delta\psi = -i\delta\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbb{L}\psi/\hbar$$

ここで、$\mathbb{L}$は角運動量演算子である。

空間回転

空間回転の演算子の母関数は角運動量である。

$$U_{\delta\omega} = e^{-i\delta\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{L}/\hbar}$$

よって空間回転に対して不変な系では、角運動量は保存する。