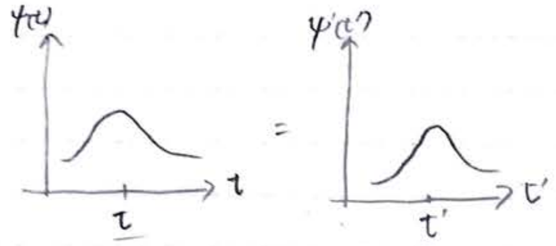
§1.2 保存則の具体例

§1.2.1 時間推進とエネルギー

時間間隔τの時間推進 T_τ



$t \to t' = T_\tau t = t+\tau$

$\psi(t) \to \psi'(t) = U_\tau \psi(t)$

$\psi'(t') = \psi(t)$ より

$$\psi'(t) = \psi(t-\tau) = U_\tau \psi(t)$$

τ→無限小

$$\delta\psi = \underbrace{\psi(t-\delta\tau)}_{\psi(t)-\delta\tau\,\partial_t\psi} - \psi(t) = -\delta\tau\,\partial_t\psi$$

shrödinger eq を使って

$$\delta\psi = -\delta\tau\frac{(H\psi)}{i\hbar} = i\delta\tau H\frac{\psi}{\hbar}$$

$i\hbar\,\partial_t\psi = H\psi$

$\partial_t\psi = \frac{1}{i\hbar}H\psi$

時間推進

$$U_{\delta\tau} = e^{+iH\delta\tau/\hbar}, \quad [H, H] = 0.$$

時間に依存しない

$U^\dagger = U^{-1}$

保存量

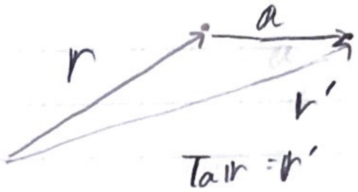
$\langle H\rangle = E$

エネルギー

時間推進で系が不変 → エネルギー保存則

§1.2.2 空間推進と運動量

3次元の空間推進 a



$T_a r \to r' = r + a$

$\psi \to \psi'$

$\psi'(r') = \psi(r)$ より

$\psi'(r) = \psi(r-a)$

$\simeq \psi(r) - a\cdot\nabla\psi$ (テイラー展開)

$a \to$ 無限小として

$\delta\psi = -a\cdot\nabla\psi = ia(i\hbar\nabla\psi)/\hbar = -ia\cdot p\psi/\hbar$, $\boxed{p = -i\hbar\nabla}$

空間推進

母関数

$U_{\delta a} = e^{-i\delta a\cdot p/\hbar}$

空間推進で不変(並進対称性を持つ)系では運動量は保存

例: 自由空間でのハミルトニアン $H_0 = \frac{p^2}{2m} = \frac{1}{2m}(p_x^2+p_y^2+p_z^2)$

$[H, p] = 0$

→ 運動量が保存

観測量の変換

一般では O 物理量(エルミート演算子)の変換則

母関数

$O = e^{i\delta\lambda G/\hbar}$

$\delta O = i\delta\lambda[G, O]/\hbar$

$U = T_{\delta a} = e^{-i\delta a\cdot p/\hbar}$ とすると、

$G = -\delta a\cdot p$

$\delta r_i = i[-\delta a\cdot p/\hbar, r_i] = i\delta a_j[r_i, p_j/\hbar] = -\delta a_i$

$[r_i, p_j] = i\hbar\delta_{ij}$

$\delta r = -\delta a$

$T_a r \to r' = r + \delta a$ と区別

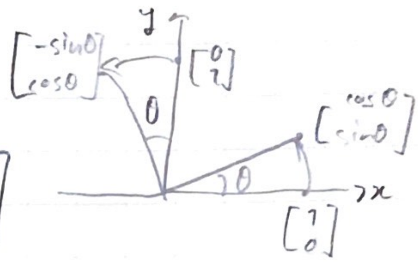
$r \to r' = r - \delta a$ ⇐ $\psi'(r) = \psi(r - \delta a)$ と整合的

$\langle\psi'|x'|\psi'\rangle$
$= \int dx\,\psi(x)x'\psi(x)$
$= \int dx\,\psi(x-\delta a)(x-\delta a)\psi(x-\delta a)$
$= \int dx\,\psi(x)x\psi(x) = \langle\psi|x|\psi\rangle$

$\delta p = -i[\delta a\cdot p, p] = 0$ 運動量は並進で不変

回転の変換の母関数

§1.2.3 空間回転と角運動量



復習　2次元回転

$$\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$$

$$r = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \to r' = \underbrace{R}_{3\times3の実行列}r$$

cf. z軸を実軸とする回転 $R = \begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta & 0\\ \sin\theta & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$

チルダー(転置) $\tilde{r} = (x\ y\ z)$ を考える

$$\widetilde{AB} = \tilde{B}\tilde{A}$$
$$(\widetilde{AB})_{ij} = (AB)_{ji} = A_{jk}B_{ki} = \tilde{B}_{ik}\tilde{A}_{kj} = (\tilde{B}\tilde{A})_{ij}$$

回転→ベクトルの大きさは変わらない!!

$$|r|^2 = \tilde{r}r = (x\ y\ z)\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \quad (x^2+y^2+z^2)$$
$$|r'|^2 = \tilde{r}'r' = (\widetilde{Rr})Rr = \tilde{r}\tilde{R}Rr$$

大きさは変わらないから

$$\tilde{R}R = E_3,\quad \tilde{R} = R^{-1}$$

↓ この条件を満たす行列

直交行列 O(3)

$$\det E_3 = \det\tilde{R}R = \det\tilde{R}\det R = (\det R)^2$$
$$1$$
$$\det R = \pm 1$$

+1のみ
回転という操作が単位行列から連続につながる
(何もしない回転から連続する回転に変換できる)

無限小変換　RがE₃に近い場合に対応

$$R = E_3 + \delta R$$

$(E_3+\delta R)(E_3+\delta R) = (E_3+\widetilde{\delta R})(E_3+\delta R)$

$$\tilde{R}R = E_3 + \delta R + \widetilde{\delta R} = E_3 \Rightarrow \delta R + \widetilde{\delta R} = 0 \quad \widetilde{\delta R} = -\delta R$$

最低一次で

反対称(転置をとって一)

$$\to \delta R = \begin{pmatrix}0 & a & b\\ -a & 0 & c\\ -b & -c & 0\end{pmatrix}$$

$$(\delta R)_{ij} = -\varepsilon_{ijk}\delta\omega_k$$

エディングトンのε

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & (ijk) = (123),(231),(312)\\ -1 & (ijk) = (132),(321),(213)\\ 0 & それ以外 \quad \varepsilon_{abc} = 0\end{cases}$$

$$(\delta r)_i = (\delta R r)_i = (\delta R)_{ij}r_j = -\varepsilon_{ijk}\delta\omega_k r_j = \varepsilon_{ikj}\delta\omega_k r_j = (\delta\omega\times r)_i$$

cf. $(A\times B)_i = \varepsilon_{ijk}A_jB_k$

$$\delta r = \delta\omega\times r$$

Rだけ回転したらrになる場所

$\psi'(Rr) = \psi(r)$, $\psi'(r) = \psi(R^{-1}r)$

$\delta\psi = -i\delta\omega \cdot L\psi/\hbar$

$\psi'(Rr) = \psi(r)$ $\psi'(r) = \psi(R^{-1}r)$

$\delta\psi = \delta(R^{-1}r) - \psi(r) = \psi(r - \delta Rr) - \psi(r) = \psi(r - \delta r) - \psi(r) = -(\delta r)\cdot\nabla\psi$

$= -(\overset{A}{\delta\omega} \times \overset{B}{r})\cdot\overset{C}{\nabla}\psi = -\overset{A}{\delta\omega}\cdot(\overset{B}{r}\times\overset{C}{\nabla})\psi = -i\delta\omega\cdot(r\times p)\psi/\hbar = -i\delta\omega\, L\psi/\hbar$

$A\cdot(B\times C) = B\cdot(C\times A) = C\cdot(A\times B) = (A\times B)\cdot C$

$L = r\times p = -i\hbar r\times\nabla$

角運動量演算子

空間回転

$U_{\delta\omega} = e^{-i\delta\omega\cdot L/\hbar}$ 母関数

空間回転に対して不変な系 → 角運動量は保存量