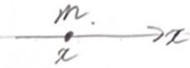
量子力学3　201810837 内田雄揮

Date 4 28 火

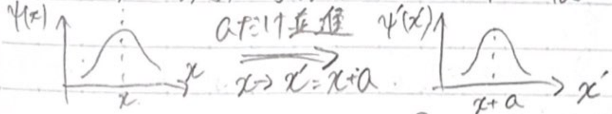
§1 量子論における対称性



例）一次元を運動する質点

x方向にaだけ移動する操作T_aを考える。（T_aはここでは対称操作）

これを波動関数で表せば、$T_a : \psi \to \psi'$



$\psi'(x+a) = \psi(x)$

∴ $\psi'(x)$の定義：関数の並進

以上をまとめると、
$$\begin{cases} x' \overset{①}{=} T_a x \overset{②}{=} x+a \\ \psi' = T_a \psi \\ \psi'(x') = \psi(x) \end{cases}$$
となる。

すなわち波動関数がx方向にaだけ平行移動することにより$\psi \to T_a\psi$と変換されたと考える。よってテーラー展開から、

$$\begin{aligned} T_a\psi(x) &= \psi'(x) \\ &= \psi(T_a^{-1}x) \quad (\because ①) \\ &= \psi(x-a) \quad (\because ②) \\ &= \psi(x) - a\psi^{(1)}(x) + \frac{a^2}{2}\psi^{(2)}(x) - \cdots \\ &= \sum_{n=0} \frac{(-a)^n}{n!}\psi^{(n)}(x) \\ &= \sum_{n=0} \frac{(-a\partial_x)^n}{n!}\psi(x) \\ &= \exp[-a\partial_x]\psi(x) \quad \left(\because e^s = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{s^n}{n!}\right) \end{aligned}$$

$(ip_x = \hbar\partial_x)$

これは、並進操作（translation）T_aが　$T_a = e^{-a\partial_x} = e^{-iap_x/\hbar}$

と運動量演算子 $p_x = -i\hbar\partial_x$ を用いて表現できることを意味する。

なお、$p_x^\dagger = p_x$ と運動量はエルミート演算子なので、

$T_a^\dagger = e^{iap_x^\dagger/\hbar} = e^{iap_x/\hbar} = T_a^{-1}$　となり、

$T_a^\dagger T_a = T_a T_a^\dagger = 1$　となる。すなわちT_aはユニタリ演算子。

§1.1.2 物理量の変換と保存則

<物理量の変換>

まずある対称操作に対応するユニタリ変換Uにより波動関数が$\psi' = U\psi$と変換すると要請する。

$\psi \to \psi' = U\psi$,　$U^\dagger = U^{-1}$

ここでブラケット記法を用いれば次のように波動関数の変換が表せる。

$|\psi\rangle \to |\psi'\rangle = |U\psi\rangle \equiv U|\psi\rangle$

No. 2.

Date 4・28・火

一般に物理量，観測量$\mathcal{O}$はエルミート演算子で与えられる。(※)
その期待値（物理量$\mathcal{O}$を実験的に観測したときの期待値）は、

$$\langle\psi|\mathcal{O}|\psi\rangle = \int dx\, \psi^*(x)\,\mathcal{O}\,\psi(x)$$

ここで、ある変換操作（対称操作）で物理量$\mathcal{O}$が$\mathcal{O}'$に変換したとき、観測量はこの変換により不変であるとしよう。（当然） つまり、

$$\langle\psi|\mathcal{O}|\psi\rangle = \langle\psi'|\mathcal{O}'|\psi'\rangle$$

この右辺に波動関数の変換則を使うと、 $\langle\psi'| = \langle\psi|U^\dagger$, $U^\dagger = U^{-1}$

$$\langle\psi|\mathcal{O}|\psi\rangle = \langle\psi|U^\dagger\mathcal{O}'U|\psi\rangle$$

$\therefore \mathcal{O} = U^\dagger\mathcal{O}'U$

これに両辺左からUをかけ、右から$U^\dagger$をかけると、

変換則 $\mathcal{O}\to\mathcal{O}' = U\mathcal{O}U^{-1}$ と変換する。

特に、変換しても不変、すなわち $\mathcal{O}\to\mathcal{O}' = U\mathcal{O}U^{-1} = \mathcal{O}$ の時、物理量$\mathcal{O}$は変換のもとで不変であるという。これは、$[\mathcal{O}, U] = 0$ と表現できる。

(※) 補足 ーブラケット記法についてー

演算子Aのエルミート共役$A^\dagger$とは任意の状態$|\psi\rangle$, $|\phi\rangle$に対して、

$$\langle\psi|A\phi\rangle = \langle A^\dagger\psi|\phi\rangle,\quad \int dx\,(\psi(x))^*(A\phi)(x) = \int dx\,((A^\dagger\psi)(x))^*\phi(x)$$

を満たす。この時、ブラケット記法で $(|\phi\rangle)^\dagger = \langle\phi|$, $|A\phi\rangle = A|\phi\rangle$,
$(|A\phi\rangle)^\dagger = \langle A\phi| = \langle\phi|A^\dagger$ と書いて、

$$\langle\psi|A\phi\rangle = \langle\psi|\cdot A|\phi\rangle$$
$$\langle A^\dagger\psi|\phi\rangle = \langle\psi|(A^\dagger)^\dagger\cdot|\phi\rangle = \langle\psi|A\cdot|\phi\rangle$$

これらより $\langle\psi|A|\phi\rangle$ という記法が許される

＜無限小変換と母関数＞ δλの1次まで

特にδλを無限小の物理量として、次の形のユニタリ変換を無限小変換という。

$$U_\lambda = e^{i\delta\lambda G/\hbar},\quad G^\dagger = G \quad (G\text{：母関数})$$

cf. $T_a = e^{-iap_x/\hbar}$ $\langle a \sim \delta\lambda,\ G \sim -p_x\rangle$

$$U_\lambda^\dagger = e^{-i\delta\lambda G^\dagger/\hbar} = U_\lambda^{-1} = e^{-i\delta\lambda G/\hbar} \quad \therefore G^\dagger = G$$

Uのユニタリ性

エルミート

Uのユニタリ性からGはエルミート演算子となり、ある物理量に対応する。
($\delta\lambda$とGとの積が$\hbar$の次元をもつ(互いに共役)ことにも注意).

このGを無限小変換の母関数と呼ぶ。この無限小変換に対して一般の物理量と波動関数の変換則をまとめると、($\delta\lambda$の最低次で) (※)

無限小変換

$$U = e^{i\delta\lambda G/\hbar} \sim 1 + i\delta\lambda G/\hbar$$

波動関数: $\delta\psi = \psi' - \psi = i\delta\lambda G\psi/\hbar$

物理量: $\delta O = O' - O = i\delta\lambda[G, O]/\hbar$

よって$[G, O] = 0$の時、Oは無限小変換の下で不変。

(※)補足 $O' = UOU^{-1}$

$$= \left(1 + i\delta\lambda G/\hbar + \cdots\right) O \left(1 - i\delta\lambda G/\hbar + \cdots\right)$$
$$= O + i\delta\lambda[G, O]/\hbar$$

前提
系が不変、すなわち$\delta H = 0$ (ハミルトニアン) のときどうなっていくか

ここで、一般にSch. eq.: $i\hbar\partial_t\Psi = H\Psi$ の形式解を

$$\Psi(t) = e^{-iHt/\hbar}\Psi(0)$$

と書けば、Gの期待値: $\langle G\rangle_t = \langle\Psi(t)|G|\Psi(t)\rangle$ の時間変化は、

$$\frac{d}{dt}\langle G\rangle_t = \frac{d}{dt}\langle\Psi(0)|e^{iHt/\hbar} G e^{-iHt/\hbar}|\Psi(0)\rangle$$
$$= \frac{i}{\hbar}\langle\Psi(0)|e^{iHt/\hbar}[H, G]e^{-iHt/\hbar}|\Psi(0)\rangle$$

前提としてある$\delta H = 0$から、$[G, H] = 0$は言えるので、
(∵) 物理量Oと同様に、無限小変換において$\delta H = i\delta\lambda[G, H]/\hbar$

$\frac{d}{dt}\langle G\rangle_t = 0$ が分かる。
よってハミルトニアンが無限小変換$e^{i\delta\lambda G/\hbar}$で不変なとき、$[H, G] = 0$であり、$\langle G\rangle_t$は時間に依存せず保存量となる。まとめると、

無限小変換と保存則

ハミルトニアンHが無限小変換$e^{i\delta\lambda G/\hbar}$の下で不変な時、
New $[H, G] = 0$とハミルトニアンとGは可換であり、Gは保存量

old 古典論 ネーターの定理: 不変性 → 保存量 ?