4/28

量子力学3

2018/0850　後藤虎斗

目的：量子力学における対称性の議論の基礎を学ぶ

自発的対称性の破れ

磁石（強磁性体）
spin（微小な磁石）が整列したもの

※物理法則：特別な方向はない ⇒ すべての方向が同等
対称性が高い

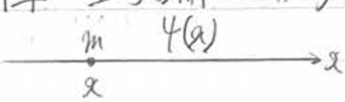
※実際に実現する現象（磁石）⇐ 特定の方向がある
対称性が低い

対称性の破れ

※自発的：磁場など他の要因なしにおきる

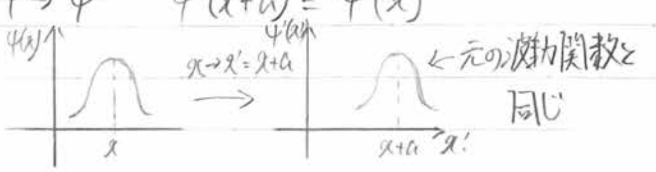
この現象は物理学の他の分野でも同様な考え方が使える ← 普遍性

第1章　量子論における対称性



一次元を運動する質点をとり，x方向にaだけ移動する操作T_aを考える。（aだけの並進 $x \to x' = x+a$）
元の波動関数を$\psi(x)$，移動させた後の波動関数を$\psi'(x)$とすると，

$T_a : \psi \to \psi'$　　$\psi'(x+a) = \psi(x)$



・$\psi'(x)$の定義：関数の並進の定義

平行移動した場所 $x+a = T_a x$ で元の波動関数の値をとる関数が平行移動したということ。

関数 function：数 ↦ 数 $x \mapsto f(x)$ 演算子：関数 ↦ 関数 operator　$\psi(x) \mapsto \psi'(x)$

これを，

$$x' = T_a x = x + a \quad (T_a：対称操作)$$

微分ではない → $\psi' = T_a \psi$

$\psi'(x') = \psi(x)$　と書いて，

波動関数がx方向にaだけ平行移動することにより $\psi \to T_a \psi$ と変換されたと考える。

テイラー展開から

$$\begin{aligned}
T_a \psi(x) &= \psi'(x) = \psi(T_a^{-1} x) = \psi(x-a) \\
&= \psi(x) - a\psi^{(1)}(x) + \frac{a^2}{2}\psi^{(2)}(x) \mp \cdots \\
&= \sum_{n=0} \frac{(-a)^n}{n!} \psi^{(n)}(x) \\
&= \sum_{n=0} \frac{(-a\partial_x)^n}{n!} \psi(x) \\
&= e^{-a\partial_x} \psi(x)
\end{aligned}
\qquad
\left(e^A = 1 + A + \frac{1}{2!}A^2 + \frac{1}{3!}A^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n \right)$$

となる。これは，
並進操作T_a（$\psi(x)$から$\psi'(x)$を作り出す）という演算子が

$$T_a = e^{-a\partial_x} = e^{-iaP_x/\hbar}$$

と運動量演算子 $P_x = -i\hbar\partial_x$ を用いて表現できる。
また運動量はエルミート演算子より $P_x^\dagger = P_x$ を満たすから，

$$T_a^\dagger = e^{+iaP_x^\dagger/\hbar} = e^{+iaP_x/\hbar} = T_a^{-1}$$ となり

$$T_a^\dagger T_a = T_a T_a^\dagger = 1$$ ← $\boxed{何もしない演算子にもどる}$

まとめ

x方向への並進操作は演算子で書くことができる。 ↳ 運動量演算子を用いて表現することができる。 ↳ $T_a^\dagger T_a = T_a T_a^\dagger = 1$ の関係を満たすから ユニタリ演算子という。

1.1.2. 物理量の変換と保存則

物理量の変換

ある対称操作に対応するユニタリ変換Uにより
波動関数が$\psi'=U\psi$と変換するとする。

$\psi \to \psi' = U\psi$, $U^\dagger = U^{-1}$.

ブラケット記法を用いると

$|\psi\rangle \to |\psi'\rangle = |U\psi\rangle = U|\psi\rangle$

一般に物理量，観測量Oはエルミート演算子で
あたえられ，その期待値は

$\underbrace{\langle\psi|O|\psi\rangle = \int dx\, \psi^*(x)\, O\psi(x)}_{\text{内積}}$ のようになる。

前提：ある変換操作（対称操作）で物理量
OがO'に変換するとしたとき，観測量
はこの変換により不変であるとする。
$\langle\psi|O|\psi\rangle = \langle\psi'|O'|\psi'\rangle$

右辺に波動関数の変換則を使えば
$\langle\psi|O|\psi\rangle = \langle\psi|U^\dagger O' U|\psi\rangle$
$(\because \langle\psi'| = \langle\psi|U^\dagger,\ U^\dagger = U^{-1})$

となるから

$O = U^\dagger O' U$ つまり ← （左からU、右から$U^\dagger$）

$O \Rightarrow O' = UOU^{-1}$ と変換する

特に

$O \to O' = UOU^{-1} = O$ という変換しても変わら
ない時，物理量Oは変換のもとで不変であるという。$\boxed{UO = OU}$
$[O, U] = 0$ と表現できる。

無限小変換と母関数

特に$\delta\lambda$を無限小の物理量として，次の形のユニタリ変換
を無限小変換という。

$U_\lambda = e^{i\delta\lambda G/\hbar}$, $G^\dagger = G$ ←母関数

無限小変換

$U = e^{i\delta\lambda G/\hbar} \sim 1 + i\delta\lambda G/\hbar$

波動関数：$\delta\psi = \psi' - \psi = i\delta\lambda G\psi/\hbar$

物理量：$\delta O = O' - O = i\delta\lambda[G, O]/\hbar$

よって$[G, O] = 0$の時，Oは無限小変換の下で不変

$$O' = \underbrace{(1 + i\delta\lambda G/\hbar + \cdots)}_{U}\, O\, \underbrace{(1 - i\delta\lambda G/\hbar + \cdots)}_{U^{-1}} = O + i\delta\lambda[G, O]/\hbar$$

ハミルトニアンH　　系が不変

$\delta H = 0$, $U = e^{i\delta\lambda G/\hbar}$に対して$H$が不変

一般にシュレディンガー方程式$i\hbar\partial_t\Psi = H\Psi$の形式解を
$\Psi(t) = e^{-iHt/\hbar}\Psi(0)$ と書けば

Gの期待値$\langle G\rangle_t = \langle\Psi(t)|G|\Psi(t)\rangle$の
時間変化は　　　　^時間に依存

$$\frac{d}{dt}\langle G\rangle_t = \frac{d}{dt}\langle\Psi(0)|e^{iHt/\hbar}Ge^{-iHt/\hbar}|\Psi(0)\rangle$$
$$= (i/\hbar)\langle\Psi(0)|e^{iHt/\hbar}[H, G]e^{-iHt/\hbar}|\Psi(0)\rangle$$

$$\frac{d}{dt}\langle G\rangle_t = \langle\partial_t\Psi(t)|G|\Psi\rangle + \langle\Psi|G|\partial_t\Psi(t)\rangle$$

（シュレディンガー方程式）

$$\overset{}{=} -\frac{1}{i\hbar}\langle\Psi|HG + \frac{1}{i\hbar}GH|\Psi\rangle$$
$$= \frac{1}{i\hbar}\langle\Psi|(GH - HG)|\Psi\rangle$$
$$= \frac{i}{\hbar}\langle\Psi|[G, H]|\Psi\rangle$$

よって

ハミルトニアンが無限小変換$e^{i\delta\lambda G/\hbar}$で不変なとき，
$[H, G] = 0$であり，$\langle G\rangle_t$は時間に依存せず
保存量となる。

無限小変換と保存則

ハミルトニアンHが無限小変換$e^{i\delta\lambda G/\hbar}$の下で
不変な時，$[H, G] = 0$とハミルトニアンとGは
可換であり，Gは保存量となる。