物理学 A

平成 20 年 10 月 13 日版

2008 年

初貝

第I部

質点の力学

第1章　運動の記述と普遍性

　この世界にはいろいろなものが存在します。空気、水、野球のボール、自動車、人間、星、原子、宇宙等、思考、概念、文学、などいくらでもすぐに思い浮かぶと思います。
　これらの多種多様な「もの」のなかで、特に自然科学が対象とし得る「もの」を記述することを考えてみましょう。このようなものの記述とはなにを指すのでしょうか？その「もの」を知らない人に、数量的な記録をもとにそれを客観的に説明できることができれば記述されているといってよいと思います。
　このような「ものの記述」を物理学として考えたとき、どうして水が透明なのか、星がなぜ光るのか、金属がなぜ光沢をもつのかといった「状態の記述」と惑星の空の上での移動の様子、自動車のカーブの曲がり方、野球の投手が投げるカーブがなぜ曲がるのかといった「運動の記述」とにわけることができます。

ものの記述

状態の記述 $\Longleftrightarrow$ 運動の記述

物理学としての「力学」の重要な一つの目的には、この後者の物体の運動の記述があります。
　以下この運動の記述について少し考えてみましょう。物体の運動の記述に話を限ったとしても自動車、自転車の運動、ボートの運動から、液体の流れ、風船の動き、太陽の動きから、宇宙の運動、原子の運動まで、いろいろな時間スケール、空間スケール、これまた種々多様で雑多なわけです。これらの運動の記述といういわば大問題を考えたとき、学問によりいろいろなアプローチの仕方があることに気づきます。
　自然科学としての物理学を考えたとき、その大きな特徴の一つとして、「普遍性」(Universality) という概念を重視することがあります。若干、画一的なくくりで議論を進めますので、異論もあるかと思いますが、物理学の特徴を「化学」「材料科学」「生物学」等と「物理学」を比較してわかりやすく説明してみましょう。これら物理学以外の学問ではいろいろな化学物質や材料の構造形成やそこでおこる化学反応、材料の特異な機能など個々の過程を詳しく検討し、それらの材料の特性を大事にして、どれがどのように違い、そしてなにが特徴でどのように有用かと

いったことを中心に研究がおこなわれていると思います。これらを総括的に「多様性」(diversity) を重視する研究と呼びましょう。もちろんこれらは重要ですし、人間の文明に寄与するところも非常に大きいことはもちろんですが、物理学の見方は少し違います。物理学のよってたつところの「普遍性」とはいろいろな現象に広くあまねく存在する基本的な観点な側面を意味します。細部によらない基本的な部分をうまく抽出し簡明に理解することを物理学は目的とするのです。

物理学の特徴

多様性 (Diversity) $\Longleftrightarrow$ 普遍性 (Universality)

この意味で力学の記述は教育的です。「質点」とは「質量はあるが大きさのないもの」のことですが、もちろんそのような物体は世の中どこにも存在しません。現実の世界にあるものはすべて大きさがあります。物体には色、形、密度、温度、質量、電荷、硬さ、回転速度、といった種々の特性があります。その中で質量という一つの側面だけに注目し、他の特性をすべて切り捨てることにより質点という理想化された概念が形成されるのです。野球のピッチャーの投げるボールの運動においてはボールの回転や空気抵抗は本質的でしょう。自動車が高速道路でカーブを曲がるときには車高がいくらかということもとても重要なことはもちろんです。銀河の運動においては銀河の形や密度分布もその形成過程を考えるときには決定的な意味を持つに違いありません。ただし、これらを質量という一つの特性のみをもつ質点として考えたとき、そこには共通の運動の法則が観測されます。この質点としての記述はもちろん完全には正確ではないでしょう。しかしある時間スケール、空間スケールでの議論においてはボールも、原子も、宇宙も質点として十分正確に記述される領域があるのです。その領域では質量という１つの物理量で現象を切り出すとき、ボールも宇宙も完全に同等です。質量の値が異なるだけです。この質点としての共通の運動法則こそが、物理学の最も大事にする「普遍性」なのです。

第2章　1次元の運動の記述

2.1　質点の運動方程式（１次元）

前節で説明した質量のみをもち大きさを持たない理想化された物体である質点の運動の記述を考えてみましょう。

2.1.1　ニュートンの運動方程式

ここではまず空間的には１次元的、つまりまっすぐなレール上に運動が限られている質点の運動を考えてみたいと思います。運動はある特定の時間 t にレール上の位置 x をさだめることにより確定します。そのためにはまず、時間 t, 空間座標 x をそれぞれどこからはかるか、（時間、空間の原点といいます）を決めておかなければいけません。ただし、しばらくのあいだ、この原点は適当なところにとられているとしておきましょう。

時刻 t における座標を $x(t)$ としたとき、関数 $x = x(t)$ がさだまれば運動が確定するわけです。運動が t_i に開始し、 t_f に終了するとしたとき図2.1 に示すように、関数 $x = x(t)$ のグラフが定まりますが、このような質点の運動を示す $t - x$ 平面上の曲線（グラフ）を 世界線 と呼びます。１次元の質点のとき、世界線は $1 + 1$ 次元の曲線となりますが、この世界線はどのようにして定められるのでしょうか？

これは皆さんもよく知っている ニュートンの運動方程式

$$F = ma$$

により定まると考えられています。ここで F は質点に働く力、 m は質量、a は加速度です。

これは経験事実、実験事実を集積してその中から普遍的に成立すると見なせる関係式を法則として抽出したもので、数学の公理とは異なることに注意しましょう。実際状況によってはこの関係式は完全には成立せず、補正を受けますし、全く

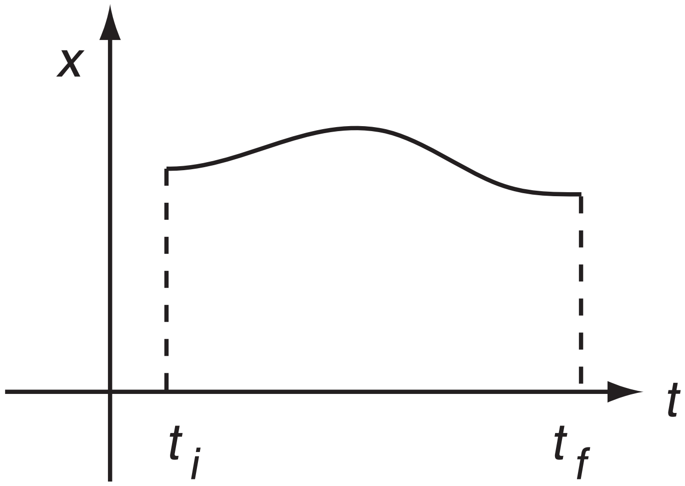

図 2.1: 1 次元質点の世界線。1 + 1 次元空間内の曲線をつくる

異なる法則を用いないと実験事実を説明できないこともあります。例えば、量子論、相対論の適用が必要な状況がその例です。しかしこのニュートンの運動方程式が本質的に物理系の運動を支配している現象も当然ながらたくさんあり、その階層においては量子論、相対論は不要であり、ニュートンの運動方程式こそが本質的に重要性であることは現在の物理学においても全くかわりありません。

このニュートンの運動方程式は各時刻において成り立つと考えられています。ここで時刻 t における加速度 $a(t)$ とは時刻 t の速度を $v = v(t)$ としたときその時間微分により次のように与えられます。

$$a = a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = \dot{v}$$

ここで時間微分を $\dot{}$ で示しました。同様に時刻 t における速度 $v = v(t)$ とは時刻 t における座標 $x = x(t)$ の時間微分にて与えられます。

$$v = v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = \dot{x}$$

以上まとめて

１次元の質点に対するニュートンの運動方程式 (Newton)

時刻 t に働く力を $F = F(t)$ として、時刻 t に $x(t)$　にある質点の運動は次の微分方程式に従う。

$$F = m\ddot{x}$$

ここで $\ddot{x}$ は世界線（グラフ）の各点での特性（曲がり具合）として与えられていることに注意しておきましょう。

質点の運動はこのように微分方程式で記述されますから、その一般解は任意定数を含み、一意には定まりません。しかし、現実におこる運動は一つですので、その任意定数は何らかの方法で確定されるはずです。具体的には初期時刻 t_i における初期条件と呼ばれる条件から運動は一意に定まります。具体的な初期条件としてh

$$x(0) = x_0$$
$$v(0) = v_0$$

のように初期位置と初期速度を与えるものが一般的です。

2.1.2 等加速度運動

外力 $F =$ 定数の時を考えてみましょう。この時運動方程式から

$$\ddot{x} = \frac{d}{dt}\dot{x} = a_F \equiv \frac{F}{m} = \text{定数}$$

となります。この式を時刻 $\tilde{t}$ の関数とみて、辺ごとに時刻 0 から t まで積分すると以下のようになります。

$$\int_0^t d\tilde{t}\,\frac{d}{d\tilde{t}}\dot{x}(\tilde{t}) = \int_0^t d\tilde{t}\,a_F$$
$$\dot{x}(t) - \dot{x}(0) = a_F(t-0) = a_F t$$

となります。この操作を微分方程式を積分するといいます。ここで $v_0 = \dot{x}(0)$ として

$$\dot{x}(t) = a_F t + v_0$$

これをもう一度積分して

$$x(t) = \frac{1}{2}a_F t^2 + v_0 t + x_0$$

x_0 は任意の定数です。これがよく知られた等加速度運動です。

また外力 $F = 0$ の場合, $a_F = 0$ であり、

$$x(t) = v_0 t + x_0$$

となりますが、これは等速度運動です。すなわち外力が働かない質点の運動は等速度運動となります。外力が働かなくても静止しているわけではなく、等速度運動するのです。これはニュートンの運動方程式の重要な帰結の一つです。

2.1.3　一様重力下での自由落下

　等加速度運動としてよく知られたものに一様重力下での自由落下運動があります。これを考えてみましょう。この時の運動方程式は、鉛直下向きに x 軸をとれば g を重力加速度として次のようになることはよく知っていることでしょう。

$$
\begin{aligned}
m\ddot{x} &= F = mg \\
\dot{x} &= g
\end{aligned}
$$

もちろんこれで正しいのですが、この運動に関して最も重要なことは質点に働く重力 F が

$$F = mg$$

であること、すなわち物体が質点として見なせれば働く重力は質量 m だけに依存し、さらに質量にかならず比例するということです。これはニュートンの運動方程式とは独立の経験事実であり、重要かつ最も古い物理法則の一つです。野球のボールでも鳥の羽でも石でも質量さえ等しければ運動は等しくなることをこの法則は述べますが、実際 2 階から落下運動をさせたとき羽の運動と野球のボールでは全く異なる運動をすることは皆さんもよくご存じでしょう。現在では、その理由は空気抵抗があるからだということは誰でも知っていると思いますが、質点の運動として空気抵抗その他の要素をすべて切り捨て、普遍的な法則をそこに見いだすことはきわめて困難でかつ重要な発見であったのです。皆さんもよくご存じでしょうが、これは Galileo Galilei による発見とされています。

2.1.4　単振動

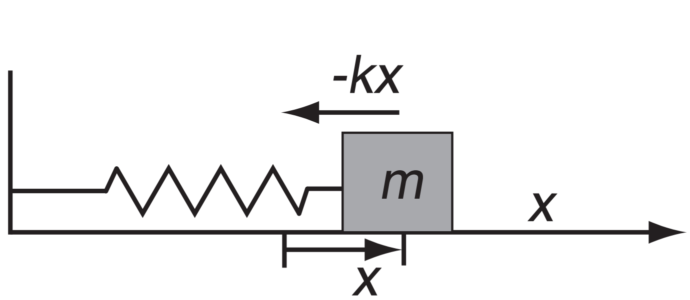

図 2.2: バネに働く力

ばねに固定された質点に働く力 F はバネが自然長の位置を座標の原点として $F = -kx$ とかけますから (図 5.1) 運動方程式は

$$F = -kx = m\ddot{x}$$

ここで $\omega^2 = \frac{k}{m}$ として、これを書き直して

$$\ddot{x} = -\omega^2 x$$

これに直接代入すれば $x_s = \sin\omega t$, $x_c = \cos\omega t$ はこの微分方程式の解であることはすぐわかります。またこれは線形の斉次方程式ですから、その線形結合も解で、一般解は

$$x = C_s \sin\omega t + C_c \cos\omega t$$

と書けます。これはまた複素数を引数とする指数関数をもちいて

$$x = C_+ e^{i\omega t} + C_- e^{-i\omega t}$$

とも書けます。これらの未定定数は適当な初期条件により定められることとなります。

2.2 エネルギーと保存力（１次元）

2.2.1 力学的仕事と運動エネルギー

運動方程式に質点の速度をかけて時間間隔 $[t_i, t_f]$ で積分してみましょう。

$$\int_{t_i}^{t_f} F(t)\frac{dx(t)}{dt}dt = m\int_{t_i}^{t_f} dt\dot{x}\ddot{x} \tag{2.1}$$

ここで合成関数の微分の公式から

$$\frac{d}{dt}(\dot{x})^2 = 2\dot{x}$$

ですから式 (2.1) の右辺は

$$\begin{aligned} m\int_{t_i}^{t_f} dt\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\dot{x})^2 &= \frac{1}{2}m\dot{x}^2\Big|_{t_i}^{t_f} \\ &= K(t_f) - K(t_i) \end{aligned}$$

となります。ここで

$$K(t) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 = \frac{1}{2}mv^2$$

は時刻 t における 質点の運動エネルギー と呼ばれます。

一方式 (2.1) の左辺は、置換積分の公式から

$$\int_{t_i}^{t_f} F(t)\frac{dx(t)}{dt}dt = \int_{x_i}^{x_f} F(t(x))dx = \int_{x_i}^{x_f} Fdx$$

となります。ここで $t = t(x)$ は時刻 t における質点の座標 $x = x(t)$ の逆関数です。ここで質点の運動が単調でないとき、図 (2.3) のようにこの逆関数は一価となりませんから

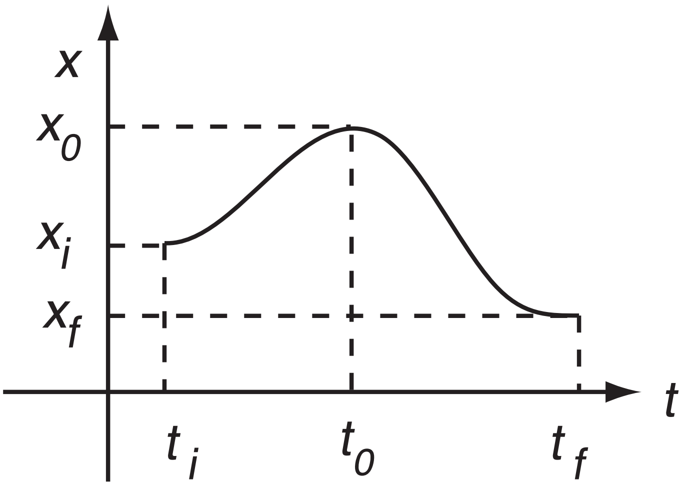

図 2.3: 仕事

この左辺の式は次のものを意味します。

$$\int_{x_i}^{x_f} Fdx = \int_{x_i}^{x_0} Fdx + \int_{x_0}^{x_f} Fdx$$

このように解釈した左辺を

$$W(t_i \to t_f) = \int_{x_i}^{x_f} Fdx$$

として時刻 t_i から t_f の間になされた (力学的) 仕事 と呼びます。また $F(t)\dot{x}(t)$ を時刻 t における仕事率と呼びます。以上をまとめておきましょう。

質点になされた仕事と運動エネルギー

$$\Delta K \equiv K(t_f) - K(t_i) = W(t_i \to t_f)$$

運動エネルギーの変化は質点になされた仕事に等しい。

2.2.2 保存力と力学的エネルギー保存則

一般に運動方程式に現れる力 $F = F(t)$ とは時刻 t ごとに決定されるわけですが、その中でも質点が同じ位置にあれば、どんな時刻でも必ず同じ力となるような種類の力を <u>保存力</u> と呼びます。つまり、運動方程式が

$$F(t) = \tilde{F}(x) = m\ddot{x},\ x = x(t)$$

となるような関数 $\tilde{F}$ が存在するような力 F を一次元の保存力と呼びます。この時、力学的仕事は次のような簡単な形をとります。

$$\begin{aligned} W(t_i \to t_f) &= \int_{t_i}^{t_f} \tilde{F}(x(t)\frac{dx(t)}{dt}dt \\ &= \int_{x_i}^{x_f} \tilde{F}(x)dx \end{aligned}$$

ここでポテンシャル $V(x)$ と呼ばれる座標の関数を次のように定義しましょう。

$$V(x) = -\int_{x_0}^{x} d\tilde{x}\tilde{F}(\tilde{x})$$

x_0 は固定された任意の座標です。これから

$$F(x) = -\frac{dV}{dx}$$

とポテンシャルを微分することで保存力が得られます。これを用いれば力学的仕事は

$$W(t_i \to t_f) = -\left(V(x_f) - V(x_i)\right)$$

となります。よって前節の関係から $K(t_f) - K(t_i) = -(V(x_f) - V(x_i))$ となり、これを書き直して <u>力学的エネルギー保存則</u> と呼ばれる次の関係が得られます。

力学的エネルギー保存則

$$K(t_i) + V(x_i) = K(t_f) + V(x_f)$$
$$K + V : 一定$$

これは $K + V$ が質点の運動において不変であること、不変量 であること、または 運動の定数 であることを意味します。このような不変量は偶然生まれるのではなく、その背後に重要な物理的理由があると考えられ、物理学において常に重要なものと考えられています。いまの場合、ポテンシャル力による運動であることがその保存則の理由と考えられます。保存力でない力による運動、例えば摩擦力が働けばエネルギー保存則は成立しません。

一般のポテンシャル力による運動を考えてみましょう。

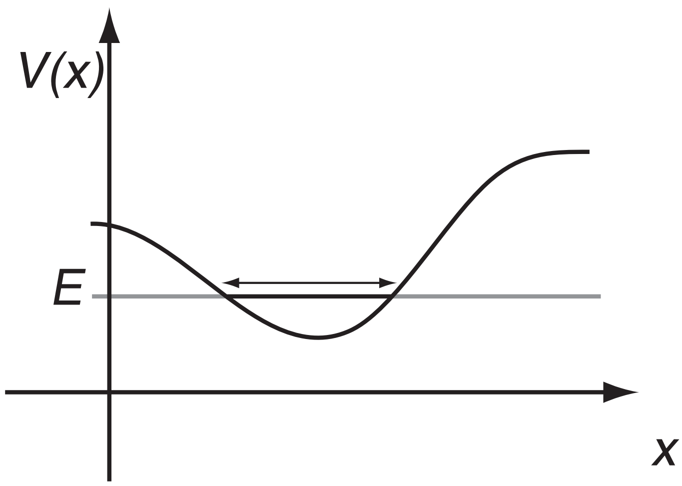

図 2.4: ポテンシャルと運動領域の制限

この時ある時刻での全エネルギーを E とすればこれは、質点の運動において常に等しい値をとります。よって $E = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + V(x)$ を書き直して運動エネルギーは常に正またはゼロであることを使うと

$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2 = E - V(x) \geq 0$$
$$E \geq V(x)$$

運動し得る領域においてはこの関係式が常に成立しなければなりません。つまり、運動領域は図 (2.4) に示される領域に限られることとなります。これはどんな初期

条件に対する運動でも成り立たなければなりませんし、これを示すために微分方程式を解く必要もありません。これは不変量の有効性を示す一つのわかりやすい例といえるでしょう。

2.2.3　いくつかのポテンシャル力（１次元）

ここではいくつかのポテンシャル力の例をあげてみましょう。

- 一様な重力

  鉛直下向きを x 座標正の向きとして、質量 m の質点には常に $F = mg$ の力が作用しますから

$$V(x) = -\int_{x_0}^{x} d\tilde{x}\, mg = -mgx + V_0, \quad V_0 = mgx_0$$

  となります。ここで V_0 は原点の選び方に対応する定数です。これから一様重力下の質点は高度に比例するポテンシャルエネルギーをもつことがわかります。

- 単振動

  $F = -m\omega^2 x = -kx$ ですから

$$V(x) = \quad -\int_{x_0}^{x} d\tilde{x}\, (-m\omega^2 x) = \frac{1}{2} m\omega^2 x^2 + V_0 = \frac{1}{2} kx^2$$

  のポテンシャルエネルギーを単振動する質点は持つこととなります。

- 強制振動

2.3　運動量と力積（１次元）

2.3.1　運動量とその保存

保存則、不変量の例として外力が働かない質点の運動方程式を考えてみましょう。前に具体的に微分方程式を解くことで質点は等速度運動することを示しましたがこれを少し異なる観点からみてみます。運動方程式は

$$m\ddot{x} = 0$$

ですが、ここで運動量 p を

$$p = m\dot{x} = mv$$

と定義すれば運動方程式は

$$\frac{d}{dt}p = 0$$

となります。これから

$$p = p_0 : \text{定数}$$

となりますが、これは運動量 p が運動の定数、不変量であることを示しています。これを運動量保存則と呼びます。

運動量保存則

外力が働かないとき、質点の運動量は保存し、不変量となる (運動の定数)。

力が働くときには運動量は保存されませんが、それでも以下のように運動方程式を $[t_i, t_f]$ で時間積分することで

$$\frac{d}{dt}p = F(t)$$

$$\int_{t_i}^{t_f} dt\, \frac{d}{dt}p = \int_{t_i}^{t_f} dt\, F(t)$$

これを次のように読みます。

運動量変化と力積

運動量変化は力積に等しい

$$\Delta p = I(t_i, t_f)$$

$$\Delta p = p(t_f) - p(t_i)$$

$$I(t_i, t_f) = \int_{t_i}^{t_f} dt\, F(t)$$

ここで $I(t_i, t_f)$ は $[t_i, t_f]$ における力積と呼ばれます。(図 (2.5) 参照)

図のようにこの時間間隔の前後のみを考える際には力積 $I(t_i, t_f)$ さえ等しければその間の力の時間変化は運動にはいっさい関係しませんので

$$I(t_i, t_f) = \bar{F}\Delta t, \quad \Delta t = t_f - t_i$$

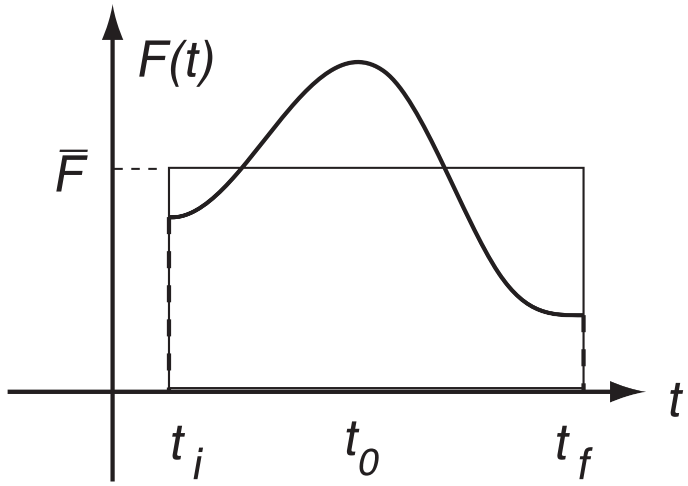

図 2.5: 力積

と考えてもよいこととなります。例えばきわめて短い時間の間のみ力が働く「撃力」と呼ばれるような力による運動の解析にはこの平均的な力が有効に使われます。

例えば理想的な気体の運動を剛体球に近似する際などがこの例となります。たくさんの剛体球が図 (2.6) のように固定された壁で跳ね返る状況を考えてみましょう。

１次元の長さ L の箱に N 個のの粒子が入っていて、ある粒子の速度を v としましょう。一回の衝突で速度が $-v \to v$ と $2v$ 変化しますからそのときの運動量変化は $2mv$ となります。x 軸負の向きの速度を持っている粒子は全粒子の半分で単位時間あたり粒子は v 進んで、$\frac{1}{2}\rho v$ 回の衝突がおこると考えられます。ここで粒子密度 $\rho = N/L$ としました。

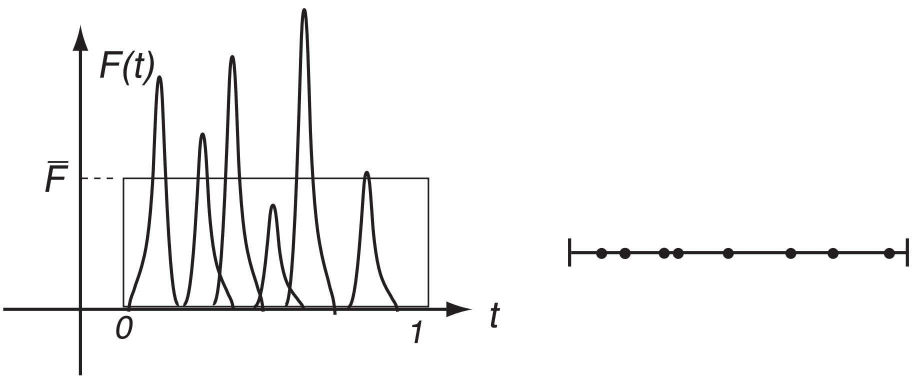

図 2.6: 多くの剛体球壁で跳ね返るときの力積

これから単位時間あたり壁が受ける平均の力積は

$$2mv \times \frac{1}{2}\rho v = \frac{mv^2 N}{L} = \bar{F}$$

これが壁がうける平均的な力となります。

第3章　3次元の運動の記述

3.1　3次元の質点の運動

3.1.1　運動方程式とベクトルによる記述

3 次元空間における質点の運動はある時刻 t における質点の位置、すなわち任意に固定した原点 O から質点の位置まで引いた矢印で指定されますが、これは位置ベクトル $\vec{r}$ として表現できます。

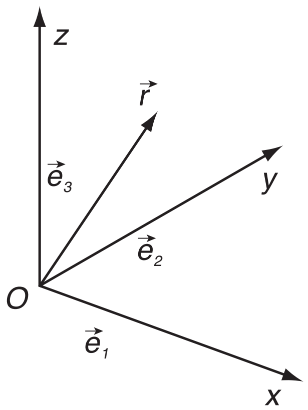

図 3.1: 位置ベクトル

$$\vec{r} = \boldsymbol{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1(t) \\ r_2(t) \\ r_3(t) \end{pmatrix}$$

ここで O を固定したとき、直交座標で $\boldsymbol{r}$ の成分を $x = r_1, y = r_2, z = r_3$ と書きました。

位置ベクトルは原点を固定しても一般には向きの異なる（つまり回転した）座標で書いたとしてよいですから、そのときの座標系を O' 系とすると同じ点の位置ベクトルは

$$\boldsymbol{r}' = \begin{pmatrix} r'_1 \\ r'_2 \\ r'_3 \end{pmatrix}$$

とも書けるはずです。一般に回転は線形なので[1]実の 3×3 行列 T をもちいて

$$\boldsymbol{r}' = T\boldsymbol{r},\quad T = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x'}{\partial x} & \frac{\partial x'}{\partial y} & \frac{\partial x'}{\partial z} \\ \frac{\partial y'}{\partial x} & \frac{\partial y'}{\partial y} & \frac{\partial y'}{\partial z} \\ \frac{\partial z'}{\partial x} & \frac{\partial z'}{\partial y} & \frac{\partial z'}{\partial z} \end{pmatrix}$$

$$T_{ij} = \frac{\partial x'_i}{\partial x_j}$$

とかけます。このベクトルの大きさは原点から質点までの距離ですから座標系がかわっても不変なはずです。これは次のように表すことが出来ます。

$$|\boldsymbol{r}|^2 = \tilde{\boldsymbol{r}}\boldsymbol{r} = |\boldsymbol{r}'|^2 = \widetilde{T\boldsymbol{r}}T\boldsymbol{r} = \tilde{\boldsymbol{r}}\widetilde{T}T\boldsymbol{r}$$

これは変換行列 T が次の関係式をみたすことを意味します。[2]

$$\widetilde{T}T = E_3:\ 3\times 3\ \text{単位行列}$$

ここで~は転置をとることを意味します。

座標系を変更する操作、これを座標変換といいますが、この変換に対して

$$\boldsymbol{r}' = T\boldsymbol{r}$$

と変換する量をベクトルと呼ぶのです。

これから質点の速度を

$$\boldsymbol{v} = \dot{\boldsymbol{r}} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt}$$

とすれば、上記の座標変換に対して

$$\boldsymbol{v}' = \boldsymbol{v}$$

---

[1]大きさが 2 倍のベクトルは回転により元のベクトルを回転したものの 2 倍のベクトルに移ります

[2]たとえば、$\tilde{\boldsymbol{r}} = (r_1, r_2, r_3)$　です。

となりますから速度もベクトルであり、同様に以下の加速度もベクトルとなるわけです。

$$
\begin{aligned}
a =& \dot{\boldsymbol{v}} = \ddot{\boldsymbol{r}} \\
\boldsymbol{a}' =& T\boldsymbol{a}
\end{aligned}
$$

この加速度に関してニュートンの運動方程式は

ニュートンの運動方程式

$$
\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a} = m\ddot{\boldsymbol{r}}
$$

なる力 $\boldsymbol{F}$ という物理量の存在を要求します。ニュートンの運動方程式は物理法則ですから、それを記述するために導入した座標系という副次的なものに依存してはいけませんから力 $\boldsymbol{F}$ も[3]

$$
\boldsymbol{F}' = T\boldsymbol{F}
$$

というベクトルの変換則を満たします。

補足ですが、座標変換をおこなってもその値が不変であるような物理量 S

$$
S' = S
$$

をベクトルに対してスカラーといいます。

この運動方程式の解として定まる時間のベクトル関数 $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$ を定めることによって質点の運動が記述できることとなります。１次元の時の例を拡張すると理解しやすいとおもいますが、この関数は世界線とよばれる $3 + 1 (= 4)$ 次元の中の曲線と同一視できます。

3.1.2 内積と規格直交基底

ここで内積と基底ベクトルについてまとめておきましょう。２つのベクトル $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ に対して内積 $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}) = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}$ は次のように定義されます

$$
(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}) = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = \widetilde{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{B}
$$

この内積の変換則は、ベクトルの変換則に従えば次のようになります。

$$
(\boldsymbol{A}', \boldsymbol{B}') = \boldsymbol{A}' \cdot \boldsymbol{B}' = \widetilde{T\boldsymbol{A}}T\boldsymbol{B} = \widetilde{\boldsymbol{A}}\widetilde{T}T\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}
$$

[3] 依存しないような物理法則を探したという方が正確です

これは２つのベクトルの内積はスカラーとして変換することを意味します。

　ここでこれまでの議論を少し整理してみましょう。まず、任意のベクトル $\boldsymbol{v}$ が次のように書けることに注意してみましょう。

$$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = v_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + v_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + v_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = v_i \boldsymbol{e}_i^0 = (\boldsymbol{e}_1^0, \boldsymbol{e}_2^0, \boldsymbol{e}_3^0)\boldsymbol{v}$$

$$\boldsymbol{e}_1^0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_2^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_3^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

この $\boldsymbol{e}_i^0$ は基底とよばれ、次の関係式を満たします。

$$(\boldsymbol{e}_i^0, \boldsymbol{e}_j^0) = \boldsymbol{e}_i^0 \cdot \boldsymbol{e}_j^0 = \widetilde{\boldsymbol{e}^0}_i \boldsymbol{e}_j^0 = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

ここで現れた δ_{ij} をクロネッカーのデルタといいます。一般に以下の関係

$$\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_j = \widetilde{\boldsymbol{e}}_i \boldsymbol{e}_j$$

を満たす $\boldsymbol{e}_i$ は規格直交化された基底といいます。これはまた

$$O = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$$

として

$$\widetilde{O}O = \begin{pmatrix} \widetilde{\boldsymbol{e}}_1 \\ \widetilde{\boldsymbol{e}}_2 \\ \widetilde{\boldsymbol{e}}_3 \end{pmatrix} (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3) = \begin{pmatrix} (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_1) & (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2) & (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_3) \\ (\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_1) & (\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_2) & (\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3) \\ (\boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_1) & (\boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_2) & (\boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_3) \end{pmatrix} = E_3 : \ 3 \times 3 \text{ 単位行列}$$

とも表すことができます。

　任意のベクトル $\boldsymbol{v}$ を $\boldsymbol{e}_i, i = 1, 2, 3$ をもちいて $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{e}_i v_i$ と展開したとき、規格直交性から

$$v_i = (\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{v}) = \boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{v} = \widetilde{\boldsymbol{e}}_i \boldsymbol{v}$$

よって

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{e}_i \widetilde{\boldsymbol{e}}_i \boldsymbol{v}$$

ここで $\boldsymbol{v}$ は任意のベクトルなので

$$\boldsymbol{e}_i\widetilde{\boldsymbol{e}}_i = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)\begin{pmatrix} \widetilde{\boldsymbol{e}}_1 \\ \widetilde{\boldsymbol{e}}_2 \\ \widetilde{\boldsymbol{e}}_3 \end{pmatrix} = O\widetilde{O} = E_3$$

となります。これを基底ベクトル $\boldsymbol{e}_i, i = 1, 2, 3$ の完全性と呼びます。

座標変換 (回転) とは基準となる座標系を $O = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ から別な $O' = (\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2, \boldsymbol{e}'_3)$ へ変更することですが、$\boldsymbol{v}$ がベクトルとして変換することは次のようにあらわせます。

$$(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)\boldsymbol{v} = (\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2, \boldsymbol{e}'_3)\boldsymbol{v}' = (\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2, \boldsymbol{e}'_3)T\boldsymbol{v}$$

ここで $\boldsymbol{v}$ は任意ですから

$$\begin{aligned} (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3) &= (\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2, \boldsymbol{e}'_3)T \\ O &= O'T \end{aligned}$$

となり O' も規格直交化された完全系であるとして

$$T = O'^{-1}O$$

これから

$$T\widetilde{T} = E_3$$

も示せます。

3.2　保存力と力学的エネルギー保存則

3.2.1　力学的仕事

運動方程式の両辺と速度ベクトル $\boldsymbol{v} = \dot{\boldsymbol{r}}$ との内積をとってみると以下のようになります。[4]

$$\begin{aligned} \boldsymbol{F}\cdot\dot{\boldsymbol{r}} =& m\ddot{\boldsymbol{r}}\cdot\dot{\boldsymbol{r}} = \frac{m}{2}\frac{d}{dt}(\dot{\boldsymbol{r}})^2 \\ =& \frac{dK}{dt} \\ K =& \frac{1}{2}m\boldsymbol{v}^2 \end{aligned}$$

この左辺を力 $\boldsymbol{F}$ の仕事率といいますが、これは運動エネルギーの時間微分が仕事率に等しいことを示しています。さらい時間間隔 $[t_i, t_f]$ で積分すれば

$$\begin{aligned} W(t_i \to t_f) =& \int_{t_i}^{t_f} dt\, \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{r} \\ =& K(t_f) - K(t_i) = \Delta K \end{aligned}$$

となりますが、これは１次元と同様に質点になされた力学的仕事が運動エネルギーの増加となったことを意味します。

力学的仕事と運動エネルギー

$$W(t_i \to t_f) = \Delta K$$

[4]成分にわけて書けば左辺は

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\dot{\boldsymbol{r}})^2 =& \frac{d}{dt}((\dot{x})^2 + (\dot{y})^2 + (\dot{z})^2) = 2\dot{x}\frac{d\dot{x}}{dt} + 2\dot{y}\frac{d\dot{y}}{dt} + 2\dot{z}\frac{d\dot{z}}{dt} \\ =& 2(\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y} + \dot{z}\ddot{z}) = 2\dot{\boldsymbol{r}}\cdot\ddot{\boldsymbol{r}} \end{aligned}$$

ですがベクトルとしての記法にも慣れましょう。

3.2.2 保存力

１次元系の場合、質点がいる場所を指定すればその力が定まる場合を保存力の定義としましたが、３次元ではさらに条件をつけて

$$\boldsymbol{F}(t) = \widetilde{\boldsymbol{F}}(\boldsymbol{r}(t)) = -\boldsymbol{\nabla} V(\boldsymbol{r})$$
$$\boldsymbol{\nabla} V = \mathrm{grad}\, V = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial V}{\partial x} \\ \dfrac{\partial V}{\partial y} \\ \dfrac{\partial V}{\partial z} \end{pmatrix}$$

と書けることとします。つまり、これを満たす $\boldsymbol{r}$ の関数 $V(\boldsymbol{r})$ が存在することを仮定することとします。この $V(\boldsymbol{r})$ を１次元の時と同様にポテンシャルエネルギーと呼びます。保存力はポテンシャル力とも呼ばれます。

このようなポテンシャルが存在すると仕事率の式の時間積分の式をつぎのように変形できます。

$$\begin{aligned} W(t_i \to t_f) &= -\int_{t_i}^{t_f} \boldsymbol{\nabla} V \cdot \frac{d\boldsymbol{r}(t)}{dt}\, dt \\ &= -\int_{t_i}^{t_f} \left(\frac{\partial V}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial V}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial V}{\partial z}\frac{dz}{dt} \right) dt \\ &= -\int_{t_i}^{t_f} \frac{dV(\boldsymbol{r}(t))}{dt} \qquad : \quad (\text{合成関数の微分}) \\ &= -\Big(V(\boldsymbol{r}(t_f)) - V(\boldsymbol{r}(t_i)) \Big) \end{aligned}$$

ここで、$\boldsymbol{\nabla} V = \boldsymbol{\nabla} V \Big|_{\boldsymbol{r}=(\boldsymbol{r}(t)}$ と書きました。

これから一次元と同様に以下の力学的エネルギーの保存則が導かれます。

力学的エネルギー保存則

$$K(t_i) + V(\boldsymbol{r}_i) = K(t_f) + V(\boldsymbol{r}_f) = \text{運動の定数}$$

最後に回転に対する変換性について考えておきましょう。前に述べたように力は座標変換に対してベクトルとして変換すべきですから仕事率は次のように変換

します。

$$\boldsymbol{F}'\cdot\boldsymbol{v}' = \widetilde{\boldsymbol{F}'}\boldsymbol{v}' = \widetilde{\boldsymbol{F}}\widetilde{T}T\boldsymbol{v} = \widetilde{\boldsymbol{F}}\boldsymbol{v} = \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{v}$$

すなわち変換で不変ですから仕事率はスカラーとなります。同様に運動エネルギーもポテンシャルエネルギーもスカラーです。

$$\begin{aligned} W' &= W \\ K' &= K \end{aligned}$$

ポテンシャルがスカラーであるとき、すなわち

$$U'(\boldsymbol{r}') = U(\boldsymbol{r})$$

が成立するとき力がベクトルとなることは, $\boldsymbol{r}$ と $\boldsymbol{r}'$ との関係式を逆に解いて $\boldsymbol{r} = \widetilde{T}\boldsymbol{r}'$ と $\boldsymbol{r}'$ の関数とみることで次のようにして確認できます。

$$\begin{aligned} \partial_x &= \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial x'}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x'} + \frac{\partial y'}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y'} + \frac{\partial z'}{\partial x}\frac{\partial}{\partial z'} \\ &= \frac{\partial x'}{\partial x}\partial'_x + \frac{\partial y'}{\partial x}\partial'_y + \frac{\partial z'}{\partial x}\partial'_z \\ &= (\widetilde{T}\boldsymbol{\nabla}')_x \end{aligned}$$

同様にして

$$\boldsymbol{\nabla}' = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x'} \\ \frac{\partial}{\partial y'} \\ \frac{\partial}{\partial z'} \end{pmatrix}$$

とおいて

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\nabla} &= \widetilde{T}\boldsymbol{\nabla}', \quad \boldsymbol{\nabla}' = T\boldsymbol{\nabla} \\ \mathrm{grad}' &= T\,\mathrm{grad} \end{aligned}$$

と勾配自身がベクトルとして変換します。これから, U のスカラー性をもちいて

$$\boldsymbol{F}' = \boldsymbol{\nabla}'U'(\boldsymbol{r}') = T\boldsymbol{\nabla}U(\boldsymbol{r}) = T\boldsymbol{F}$$

となり、確かに保存力はベクトルとなります。

重力ポテンシャル

特に重要なポテンシャル力としては質量 m の質点に働く重力

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = k\frac{1}{r^2}\hat{\boldsymbol{r}} = k\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}, \quad r = |\boldsymbol{r}|$$

があります。$\hat{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{r}/r$ は $\boldsymbol{r}$ 方向の単位ベクトルです。万有引力の場合、引力ですので $k < 0$ となります。

これに対するポテンシャルは

$$U(\boldsymbol{r}) = k\frac{1}{r}$$

であることは次のような計算で確認できます。

$$\begin{aligned}
\partial_x U =& \frac{\partial U}{\partial x} = k\partial_x(x^2+y^2+z^2)^{-1/2} \\
=& k(-1/2)(x^2+y^2+z^2)^{-3/2}\cdot 2x \\
=& -k\frac{x}{r^3} \\
\boldsymbol{\nabla} U =& -k\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}
\end{aligned}$$

r はスカラーで $\boldsymbol{r}$ はベクトルですから、確かに重力はベクトルとして変換します。

補足ですが、一般にベクトル $\boldsymbol{A}$ に対して divergence （発散）とよばれるスカラー を次のように定義します。

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}\boldsymbol{A} =& \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A} \\
=& \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \\
=& \partial_i A_i
\end{aligned}$$

特に勾配と発散を組み合わせて一般のスカラー ϕ にスカラーを対応させるラプラシアン Δ とよばれる操作が次のように定義されます。

$$\begin{aligned}
\Delta\phi =& \operatorname{div}\operatorname{grad}\phi \\
=& \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla}\phi \\
=& \frac{\partial\phi}{\partial^2 x} + \frac{\partial\phi}{\partial^2 y} + \frac{\partial\phi}{\partial^2 z} = \left(\frac{\partial}{\partial^2 x} + \frac{\partial}{\partial^2 y} + \frac{\partial}{\partial^2 z}\right)\phi = \\
=& \partial_i\partial_i\phi
\end{aligned}$$

これらを用いると重力ポテンシャルは $r \neq 0$ である限り次の関係式を満たします

$$\Delta U = 0, \quad r \neq 0$$

これはラプラス方程式とよばれます。これが成立することを前の計算を用いて、示しておきましょう。

$$\begin{aligned}\Delta U &= -k\boldsymbol{\nabla}\cdot\frac{\boldsymbol{r}}{r^3} = -k\partial_i\frac{\boldsymbol{r}}{r^3} = -k\frac{1}{r^6}\Big(\partial_i r_i(r^3) - r_i(3r^2\partial_i r)\Big)\\ &= -k\frac{1}{r^6}\Big(\delta_{ii}(r^3) - r_i(3r^2\frac{r_i}{r})\Big) = -k\frac{1}{r^6}\Big(3r^3 - 3rr^2\Big) = 0\end{aligned}$$

3.3 運動量と力積

3.3.1 運動量と力積

運動量ベクトルを

$$\boldsymbol{p} = m\dot{\boldsymbol{r}}$$

と定義しましょう、さらに時間間隔 (t_i, t_f) における力積 $I(t_i, t_f)$ を用いて運動方程式 $\boldsymbol{F} = m\ddot{\boldsymbol{r}}$ を時間について積分して次のようにかいてみます。

$$\begin{aligned}\int_{t_i}^{t_f} dt\, F(t) &\equiv I(t_i, t_f)\\ &= \int_{t_i}^{t_f} dt\,\frac{d\boldsymbol{p}}{dt} = \Delta\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}(t_f) - \boldsymbol{p}(t_f)\end{aligned}$$

これから 1 次元と同様に運動方程式は次のように表現することもできます。

運動量と力積

運動量変化はその間に働いた力積に等しい

特に外力が働かなければ運動量は不変となります。

運動量保存則

外力が働かない限り運動量は保存する

第4章　中心力による運動

中心力とは時刻 t に位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ にある質点に働く力が

$$\boldsymbol{F} = K(t)\boldsymbol{r}$$

となるものを指します。よって質点の運動方程式は次のようになります。

$$m\ddot{\boldsymbol{r}} = K\boldsymbol{r}$$

4.1　外積と基底系の符号

中心力による運動では次に定義されるベクトルの外積とよばれる積が有用です。それを順に説明しましょう。

ベクトルの内積とは２つのベクトル $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ を用いてスカラー $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = \widetilde{A}\boldsymbol{B}$ を定義するものでしたが、外積とは２つのベクトル $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ から定義されるベクトルで次のように定義されます。

$$\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} A_y B_z - A_z B_y \\ A_z B_x - A_x B_z \\ A_x B_y - A_y B_x \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{ccccccc} A_x & & A_y & & A_z & & A_x \\ & \times & & \times & & \times & \\ B_x & & B_y & & B_z & & B_x \end{array}$$

これはエディングトンのイプシロンとよばれる次の量を定義するとコンパクトに表現できます。

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & (ijk) = (123), (231), (312) \\ -1 & (ijk) = (213), (132), (321) \\ 0 & \text{それ以外} \end{cases}$$

つまり、どの 2 つの添字でも入れ替えれば次のように符号がかわり

$$\epsilon_{ijk} = -\epsilon_{jik}, \quad \epsilon_{ijk} = -\epsilon_{kji}, \quad \epsilon_{ijk} = -\epsilon_{ikj}$$

これを完全反対称性といいます。入れ替えた添字を同じとすれば、すぐにわかるように、これから 2 個の添字が同じときには 0 となります。

$$\epsilon_{iik} = \epsilon_{ijj} = \epsilon_{iji} = 0$$

これをもちいると外積は次のように書けます。

$$(\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B})_i = \epsilon_{ijk} A_j B_k$$

ここで Einstein の記法が使われています。たとえば

$$(\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B})_1 = \epsilon_{1jk} A_j B_k = \epsilon_{123} A_2 B_3 + \epsilon_{132} A_3 B_2 = A_2 B_3 - A_3 B_2$$

となります。

つぎにベクトルの外積がベクトルとなることを確認してみましょう。

ベクトル A, B の変換則 $A'_i = T_{ij} A_j$, $B'_i = T_{ij} B_j$ から $\boldsymbol{C}' = \boldsymbol{A}' \times \boldsymbol{B}'$ として

$$C'_i \equiv \epsilon_{ijk} A'_j B'_k = \epsilon_{ijk} T_{jJ} A_J T_{kK} B_K = \epsilon_{ijk} T_{jJ} T_{kK} A_J B_K$$

となります。そこで $\widetilde{T}(\boldsymbol{A}' \times \boldsymbol{B}')$ を計算してみましょう。まず、

$$\begin{aligned}(\widetilde{T}\boldsymbol{A}' \times \boldsymbol{B}')_I =& T_{iI} (\boldsymbol{A}' \times \boldsymbol{B}')_i = T_{iI} \epsilon_{ijk} T_{jJ} T_{kK} A_J B_K \\ =& (\epsilon_{ijk} T_{iI} T_{jJ} T_{kK}) A_J B_K\end{aligned}$$

となりますが、行列式の定義から

$$\epsilon_{ijk} T_{iI} T_{jJ} T_{kK} = \epsilon_{IJK} \epsilon_{ijk} T_{i1} T_{j2} T_{k3} = \epsilon_{IJK} \epsilon_{ijk} \widetilde{T}_{1i} \widetilde{T}_{2j} \widetilde{T}_{3k} = \epsilon_{IJK} \det \widetilde{T}$$

となります。よって $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$ として

$$\begin{aligned}(\widetilde{T}\boldsymbol{A}' \times \boldsymbol{B}')_I =& (\det \widetilde{T}) \epsilon_{IJK} A_J B_K \\ \widetilde{T}\boldsymbol{C}' =& (\det \widetilde{T}) \boldsymbol{C} \\ (\det T) \boldsymbol{C}' =& T\boldsymbol{C}\end{aligned}$$

となります。($\widetilde{T} = T^{-1}$ を使いました。) つまり $\det T = 1$ であるかぎり、外積ベクトルはベクトルの変換則をみたすこととなります。$\det T$ がここので例のように変換則に現れるベクトル量を擬ベクトル（軸性ベクトル）とよぶこともあります。この時通常のベクトルは極性ベクトルとよばれます。

なお、座標変換として、反転を含まない回転に限れば $\det T = 1$ であることが以下のように示せます。

まず、基底の符号について説明しましょう。そこで基底ベクトルを並べて作った次の行列を考えてみましょう。

$$O = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$$

基底の規格直交性からこの行列は次のような関係式をみたします。

$$\widetilde{O}O = \begin{pmatrix} \widetilde{\boldsymbol{e}_1} \\ \widetilde{\boldsymbol{e}_2} \\ \widetilde{\boldsymbol{e}_3} \end{pmatrix} (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3) = \begin{pmatrix} \widetilde{\boldsymbol{e}}_1\boldsymbol{e}_1 & \widetilde{\boldsymbol{e}}_1\boldsymbol{e}_2 & \widetilde{\boldsymbol{e}}_1\boldsymbol{e}_3 \\ \widetilde{\boldsymbol{e}}_2\boldsymbol{e}_1 & \widetilde{\boldsymbol{e}}_2\boldsymbol{e}_2 & \widetilde{\boldsymbol{e}}_2\boldsymbol{e}_3 \\ \widetilde{\boldsymbol{e}}_3\boldsymbol{e}_1 & \widetilde{\boldsymbol{e}}_3\boldsymbol{e}_2 & \widetilde{\boldsymbol{e}}_3\boldsymbol{e}_3 \end{pmatrix} = E_3$$

よってこの行列式をとって

$$\det \widetilde{O}O = (\det O)^2 = 1$$

から $\det O = \pm 1$ となります。慣用で $\det O = 1$ の基底を右手系、$\det O = -1$ の基底を左手系といいます。

前に述べましたように、座標系をさだめる $(\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2, \boldsymbol{e}'_3) = \widetilde{T}$ ですから

$$\begin{aligned} O' &= (\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2, \boldsymbol{e}'_3) \\ \det O' & \\ &= \det \widetilde{T} = \det T \end{aligned}$$

となり、$\det T$ の符号により右手系と左手系の基底は入れ替わります。特に反転を含まない回転（狭義の回転）については回転操作を連続的に何もしないところまで変形できますから $\det T = 1$ となります。

4.1.1　完全反対称テンソル

ここで定義したエディングトンのイプシロンは完全反対称テンソルともよばれます。一般に引数が複数ある物理量 $A_{ijk\cdots}$ が直交基底に関する座標変換でベクトルのように

$$A'_{ijk\cdots} = T_{iI} T_{jJ} T_{kK} \cdots A_{IJK\cdots}$$

と変換するときテンソルとよびます。また

$$(\det T) A'_{ijk\cdots} = T_{iI} T_{jJ} T_{kK} \cdots A_{IJK\cdots}$$

と変換するとき、より詳しくは擬テンソルとよびます。また添字の数をテンソルの階数といいます。エディングトンのイプシロンは既に説明したように

$$
\begin{aligned}
\epsilon_{ijk}T_{iI}T_{jJ}T_{kK} =& \epsilon_{IJK}\det\widetilde{T} \\
(\det T)\epsilon_{ijk}T_{iI}T_{jJ}T_{kK} =& \epsilon_{IJK} \\
(\det T)\epsilon_{ijk}T_{iI}T_{jJ}T_{kK}T_{i'I}T_{j'J}T_{k'K} =& T_{i'I}T_{j'J}T_{k'K}\epsilon_{IJK} \\
(\det T)\epsilon_{ijk}\delta_{ii'}\delta_{jj'}\delta_{kk'} =& T_{i'I}T_{j'J}T_{k'K}\epsilon_{IJK}
\end{aligned}
$$

書き直して

$$
(\det T)\epsilon_{ijk} = T_{iI}T_{jJ}T_{kK}\epsilon_{IJK}
$$

を満たしますからここで $\det T = 1$ のとき

$$
\epsilon'_{ijk} \equiv T_{iI}T_{jJ}T_{kK}\epsilon_{IJK}
$$

とすればエディングトンのイプシロンは３階の（擬）テンソルとなります。さらにこの考察から、狭義の回転の下で

$$
\epsilon'_{ijk} = \epsilon_{ijk}
$$

となります。これはエディングトンのイプシロンは座標変換に対して不変なことを意味します。これを不変テンソルであるといいます。

ここで前に議論したクロネッカーのデルタを 2 階のテンソルと考えるとその変換性は

$$
\delta'_{ij} = T_{iI}T_{jJ}\delta_{IJ} = T_{iI}T_{jI} = (T\widetilde{T})_{ij} = \delta_{ij}
$$

となりますので、クロネッカーのデルタも不変テンソルとなります。

4.1.2 外積の性質

エディングトンのイプシロンは以下の性質を満たします。

$$
\begin{aligned}
\epsilon_{ijk}\epsilon_{ij'k'} =& \delta_{jj'}\delta_{kk'} - \delta_{jk'}\delta_{j'k} \\
\epsilon_{ijk}\epsilon_{ijk'} =& 2\delta_{kk'} \\
\epsilon_{ijk}\epsilon_{ijk} =& 6
\end{aligned}
$$

これらを完全反対称テンソルを縮約するといいます。

これらを確認してみましょう。まず次の関係式を示しましょう。

$$(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\cdot(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{D}) = (\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C})(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{D}) - (\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{D})(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C})$$

右辺は

$$\begin{aligned}
(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\cdot(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{D}) =&(A_yB_z - A_zB_y)(C_yD_z - C_zD_y)\\
&+ (A_zB_x - A_xB_z)(C_zD_x - C_xD_z)\\
&+ (A_xB_y - A_yB_x)(C_xD_y - C_yD_x)\\
=&(A_yC_y)(B_zD_z) - (A_yD_y)(B_zC_z) - (A_zD_z)(B_yC_y) + (A_zC_z)(B_yD_y)\\
&+ (xyz \to yzx)\\
&+ (xyz \to zxy)\\
=&\Big\{(A_yC_y)(B_zD_z) + (A_zC_z)(B_yD_y)\Big\} - \Big\{(A_yD_y)(B_zC_z) + (A_zD_z)(B_yC_y)\Big\}\\
&+ (xyz \to yzx)\\
&+ (xyz \to zxy)\\
=&\Big\{(A_yC_y)(B_zD_z) + (A_zC_z)(B_yD_y)\Big\} - \Big\{(A_yD_y)(B_zC_z) + (A_zD_z)(B_yC_y)\Big\}\\
&+ \Big\{(A_zC_z)(B_xD_x) + (A_xC_x)(B_zD_z)\Big\} - \Big\{(A_zD_z)(B_xC_x) + (A_xD_x)(B_zC_z)\Big\}\\
&+ \Big\{(A_xC_x)(B_yD_y) + (A_yC_y)(B_xD_x)\Big\} - \Big\{(A_xD_x)(B_yC_y) + (A_yD_y)(B_xC_x)\Big\}\\
=&\Big\{(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C} - A_zC_z)(B_zD_z) + (\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C} - A_yC_y)(B_yD_y) + (\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C} - A_xC_x)(B_xD_x)\Big\}\\
&- \Big\{(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{D} - A_zD_z)(B_zC_z) + (\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{D} - A_xD_x)(B_xC_x) + (\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{D} - A_yD_y)(B_yC_y)\Big\}\\
=&(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C})(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{D}) - (\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{D})(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C})
\end{aligned}$$

次にこれを成分で書いてみると次のようになります。

$$\begin{aligned}
\text{右辺} =&\epsilon_{iab}A_aB_b\epsilon_{icd}C_cD_d = \epsilon_{iab}\epsilon_{icd}(A_aB_bC_cD_d)\\
\text{左辺} =&(A_aC_c\delta_{ac})(B_bD_d\delta_{bd}) - (A_aD_d\delta_{ad})(B_bC_c\delta_{bc})\\
=&(\delta_{ac}\delta_{bd} - \delta_{ad}\delta_{bc})(A_aB_bC_cD_d)
\end{aligned}$$

A_a, B_b, C_c, D_d は任意ですから

$$\epsilon_{iab}\epsilon_{icd} = \delta_{ac}\delta_{bd} - \delta_{ad}\delta_{bc}$$

となります。この式で $a = c = j$ として和をとれば

$$\epsilon_{ijb}\epsilon_{ijd} = \delta_{jj}\delta_{bd} - \delta_{jd}\delta_{bj} = 3\delta_{bd} - \delta_{db} = 2\delta_{bd}$$

となります。さらに $b = d = k$ として和をとって

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{ijk} = 2\delta_{kk} = 6$$

となります。
　外積はエディングトンのイプシロンの反対称性より

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} &= -\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{A} &= 0 \end{aligned}$$

を満たします。
　　一般に $\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ とのなす角度を θ とすれば

$$\begin{aligned} |\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}|^2 &= (\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}) \cdot (\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}) = (\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{A})(\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{B}) - (\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B})(\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{A}) \\ &= |\boldsymbol{A}|^2|\boldsymbol{B}|^2(1 - \cos^2\theta) = |\boldsymbol{A}|^2|\boldsymbol{B}|^2 \sin^2\theta \\ |\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}| &= |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}| \sin\theta \end{aligned}$$

と外積ベクトルの大きさはなす角 θ の $\sin\theta$ で与えられます。
　また具体的に計算すればわかるように

$$\begin{aligned} \boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{e}_2 &= \boldsymbol{e}_3 \\ (\boldsymbol{e}_i \times \boldsymbol{e}_j) \cdot \boldsymbol{e}_k &= \epsilon_{ijk} \end{aligned}$$

となりますから、一般に $\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$ の方向は $\boldsymbol{A}$ から $\boldsymbol{B}$ に右ねじが回るときねじの進む方向が $\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$ の方向となります。これは $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B})$ が右手系となることを意味します。
　またすぐにわかるように $(\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}) \cdot \boldsymbol{C}$ は $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}$ のつくる平行 6 面体の体積となります。

$$\det(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}) = \epsilon_{ijk} A_i B_j C_k = (\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}) \cdot \boldsymbol{C} = (\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C}) \cdot \boldsymbol{A} = (\boldsymbol{C} \times \boldsymbol{A}) \cdot \boldsymbol{B}$$

4.2　角運動量と中心力

　中心力に従う質点の運動方程式の両辺を $\boldsymbol{r}$ と外積をとってみましょう。

$$m\ddot{\boldsymbol{r}} \times \boldsymbol{r} = K\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{r} = 0$$

よって

$$\frac{d}{dt}(m\dot{\boldsymbol{r}} \times \boldsymbol{r}) = -\frac{d}{dt}\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p} = 0$$

となります。ここで角運動量 $\boldsymbol{L}$ を

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p} = m\boldsymbol{r} \times \dot{\boldsymbol{r}}$$

とすれば

$$\frac{d\boldsymbol{L}}{dt} = 0$$

となります。これは以下の角運動量保存則を意味します。

角運動量保存則

中心力による運動では角運動量 $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}$ は保存する。

無限小の時間 δt 内に中心から質点までのベクトルが掃く面積が $|\boldsymbol{r} \cdot (\delta t\dot{\boldsymbol{r}})$ であるから上記の事実は単位時間に動径の掃く面積は一定であると表現できます。これは Kepler の第２法則とよばれています。

Kepler の第２法則

中心力で運動する質点について動径の単位時間に掃く面積は一定である。

よって運動は角運動ベクトル $\boldsymbol{L}$ に垂直な平面内にかぎられますからこの平面内に xy 座標系をとって２次元の問題として考えましょう。図のように

$$x = r\cos\theta$$
$$y = r\sin\theta$$

と書いて (x, y) の代わりに (r, θ) を指定することで位置ベクトルを表すことができます。これを極座標（２次元極座標）と呼びます。これから

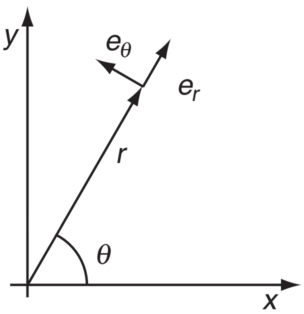

図 4.1: ２次元極座標

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{e}_r &= \hat{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{e}_x \cos\theta + \boldsymbol{e}_y \sin\theta \\
\boldsymbol{e}_\theta &= \widehat{\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial\theta}} = -\boldsymbol{e}_x \sin\theta + \boldsymbol{e}_y \cos\theta \\
(\boldsymbol{e}_r, \boldsymbol{e}_\theta) &= (\boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}_y) R \\
R &= \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \\
\widetilde{R}R &= R^{-1}R = E_2
\end{aligned}$$

となり、さらに

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{r} &= (\boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}_y)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (\boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}_y)\begin{pmatrix} r_x \\ r_y \end{pmatrix} \\
&= (\boldsymbol{e}_r, \boldsymbol{e}_\theta) R^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \equiv (\boldsymbol{e}_r, \boldsymbol{e}_\theta)\begin{pmatrix} r_r \\ r_\theta \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

となります。これを比べて

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} r_r \\ r_\theta \end{pmatrix} &= R^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\
T &= R^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

と書けます。

一般のベクトル量の変換則もこの位置ベクトルの変換則と同じとなりますから速度ベクトル $\boldsymbol{v}$ に対して

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{v} &= (\boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}_y)\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = (\boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}_y)\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} \\
&= (\boldsymbol{e}_r, \boldsymbol{e}_\theta)\begin{pmatrix} v_r \\ v_\theta \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} v_r \\ v_\theta \end{pmatrix} &= T\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

に以下の関係式を代入すれば

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= \frac{d}{dt} r\cos\theta = \dot{r}\cos\theta - r\dot{\theta}\sin\theta \\
\dot{y} &= \frac{d}{dt} r\sin\theta = \dot{r}\sin\theta + r\dot{\theta}\cos\theta
\end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} v_r \\ v_\theta \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta(\dot{r}\cos\theta - r\dot{\theta}\sin\theta) + \sin\theta(\dot{r}\sin\theta + r\dot{\theta}\cos\theta) \\ -\sin\theta(\dot{r}\cos\theta - r\dot{\theta}\sin\theta) + \cos\theta(\dot{r}\sin\theta + r\dot{\theta}\cos\theta) \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \dot{r} \\ r\dot{\theta} \end{pmatrix}$$

となります。

次に加速度の極座標成分はまず次の量を計算しておきましょう。

$$\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{pmatrix} = \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}$$
$$= \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} \dot{r}\cos\theta - r\dot{\theta}\sin\theta \\ r\sin\theta + r\dot{\theta}\cos\theta \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \ddot{r}\cos\theta - \dot{r}\dot{\theta}\sin\theta - \dot{r}\dot{\theta}\sin\theta - r\ddot{\theta}\sin\theta - r\dot{\theta}\dot{\theta}\cos\theta \\ \dot{r}\sin\theta + \dot{r}\dot{\theta}\cos\theta + \dot{r}\dot{\theta}\cos\theta + r\ddot{\theta}\cos\theta - r\dot{\theta}\dot{\theta}\sin\theta \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \ddot{r}\cos\theta - 2\dot{r}\dot{\theta}\sin\theta - r\ddot{\theta}\sin\theta - r(\dot{\theta})^2\cos\theta \\ \ddot{r}\sin\theta + 2\dot{r}\dot{\theta}\cos\theta + r\ddot{\theta}\cos\theta - r(\dot{\theta})^2\sin\theta \end{pmatrix}$$

これから極座標系 $(\boldsymbol{e}_r, \boldsymbol{e}_\theta)$ での加速度ベクトルは次のように計算できます。

$$\begin{pmatrix} a_r \\ a_\theta \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{r}\cos\theta - 2\dot{r}\dot{\theta}\sin\theta - r\ddot{\theta}\sin\theta - r(\dot{\theta})^2\cos\theta \\ \ddot{r}\sin\theta + 2\dot{r}\dot{\theta}\cos\theta + r\ddot{\theta}\cos\theta - r(\dot{\theta})^2\sin\theta \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \ddot{r} - r(\dot{\theta})^2 \\ 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} \end{pmatrix}$$

ここで $\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) = 2r\dot{r} + r^2\ddot{\theta}$ に注意して以上をまとめておきましょう。

２次元極座標での速度と加速度

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} v_r \\ v_\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{r} \\ r\dot{\theta} \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} a_r \\ a_\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ddot{r} - r(\dot{\theta})^2 \\ 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} = \dfrac{1}{r}\dfrac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) \end{pmatrix}$$

少し面倒ですが、３次元極座標についても同様に議論できます。これをやってみましょう。

$$\boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\sin\theta\cos\phi \\ r\sin\theta\sin\phi \\ r\cos\theta \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{e}_r = \frac{\widehat{\partial \boldsymbol{r}}}{\partial r} = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\phi \\ \sin\theta\sin\phi \\ \cos\theta \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{e}_\theta = \frac{\widehat{\partial \boldsymbol{r}}}{\partial \theta} = \begin{pmatrix} r\widehat{\cos\theta}\cos\phi \\ r\cos\theta\sin\phi \\ -r\sin\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\phi \\ \cos\theta\sin\phi \\ -\sin\theta \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{e}_\phi = \frac{\widehat{\partial \boldsymbol{r}}}{\partial \phi} = \begin{pmatrix} -r\widehat{\cos\theta}\sin\phi \\ r\cos\theta\cos\phi \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin\phi \\ \cos\phi \\ 0 \end{pmatrix}$$

なおこれらはこの順に右手系を作ります。

$$\begin{array}{cccc} \sin\theta\cos\phi & \sin\theta\sin\phi & \cos\theta & \sin\theta\cos\phi \\ & \times \quad\quad\quad\quad\quad \times & \quad\quad \times & \\ \cos\theta\cos\phi & \cos\theta\sin\phi & -\sin\theta & \cos\theta\cos\phi \end{array}$$

$$\boldsymbol{e}_r \times \boldsymbol{e}_\theta = \begin{pmatrix} -\sin\phi \\ \cos\phi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (\boldsymbol{e}_r \times \boldsymbol{e}_\theta)\cdot\boldsymbol{e}_\phi = 1$$

これから

$$(\boldsymbol{e}_r, \boldsymbol{e}_\theta, \boldsymbol{e}_\phi) = (\boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}_y, \boldsymbol{e}_z)\begin{pmatrix} \sin\theta\cos\phi & \cos\theta\cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\theta\sin\phi & \cos\theta\sin\phi & \cos\phi \\ \cos\theta & -\sin\theta & 0 \end{pmatrix}$$

とかけ、任意のベクトル $\boldsymbol{V}$ に対して

$$\boldsymbol{V} = (\boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}_y, \boldsymbol{e}_z)\begin{pmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{pmatrix} = (\boldsymbol{e}_r, \boldsymbol{e}_\theta, \boldsymbol{e}_\phi)\begin{pmatrix} V_r \\ V_\theta \\ V_\phi \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} V_r \\ V_\theta \\ V_\phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\phi & \sin\theta\sin\phi & \cos\theta \\ \cos\theta\cos\phi & \cos\theta\sin\phi & -\sin\theta \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{pmatrix}$$

となる。

まずは、これを用いて極座標での速度の表式を求めましょう。

$$\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} r\sin\theta\cos\phi \\ r\sin\theta\sin\phi \\ r\cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{r}\sin\theta\cos\phi + r\dot{\theta}\cos\theta\cos\phi - r\dot{\phi}\sin\theta\sin\phi \\ \dot{r}\sin\theta\sin\phi + r\dot{\theta}\cos\theta\sin\phi + r\dot{\phi}\sin\theta\cos\phi \\ \dot{r}\cos\theta - r\dot{\theta}\sin\theta \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
v_r =& \dot{r}(\sin^2\theta\cos^2\phi + \sin^2\theta\sin^2\phi + \cos^2\theta) \\
&+ r\dot{\theta}(\cos\theta\sin\theta\cos^2\phi + \cos\theta\sin\theta\sin^2\phi - \sin\theta\cos\theta) \\
&+ r\dot{\phi}(-\sin^2\theta\sin\phi\cos\phi + \sin^2\theta\sin\phi\cos\phi) \\
=& \dot{r} \\
v_\theta =& \dot{r}(\sin\theta\cos\theta\cos^2\phi + \sin\theta\cos\theta\sin^2\phi - \sin\theta\cos\theta) \\
&+ r\dot{\theta}(\cos^2\theta\cos^2\phi + \cos^2\theta\sin^2\phi + \sin^2\theta) \\
&+ r\dot{\phi}(-\sin\theta\cos\theta\sin\phi\cos\phi + \sin\theta\cos\theta\sin\phi\cos\phi) \\
=& r\dot{\theta} \\
v_\phi =& \dot{r}(-\sin\theta\sin\phi\cos\phi + \sin\theta\sin\phi\cos\phi) \\
&+ r\dot{\theta}(-\cos\theta\cos\phi\sin\phi + \cos\theta\sin\phi\cos\phi) \\
&+ r\dot{\phi}(\sin\theta\sin^2\phi + \sin\theta\cos^2\phi) \\
=& r\dot{\phi}\sin\theta
\end{aligned}$$

まとめて

$$\begin{pmatrix} v_r \\ v_\theta \\ v_\phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{r} \\ r\dot{\theta} \\ r\dot{\phi}\sin\theta \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{v} = \dot{r}\boldsymbol{e}_r + r\dot{\theta}\boldsymbol{e}_\theta + r\dot{\phi}\sin\theta\boldsymbol{e}_\phi$$

勾配もベクトルとして変換しますから、これと同様に極座標表示が求まります。

まず

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial r} &= \frac{\partial x}{\partial r}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial r}\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial r}\frac{\partial}{\partial z} \\
&= \sin\theta\cos\phi\frac{\partial}{\partial x} + \sin\theta\sin\phi\frac{\partial}{\partial y} + \cos\theta\frac{\partial}{\partial z} \\
\frac{\partial}{\partial \theta} &= \frac{\partial x}{\partial \theta}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \theta}\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial \theta}\frac{\partial}{\partial z} \\
&= r\cos\theta\cos\phi\frac{\partial}{\partial x} + r\cos\theta\sin\phi\frac{\partial}{\partial y} - r\sin\theta\frac{\partial}{\partial z} \\
\frac{\partial}{\partial \phi} &= \frac{\partial x}{\partial \phi}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \phi}\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial \phi}\frac{\partial}{\partial z} \\
&= -r\sin\theta\sin\phi\frac{\partial}{\partial x} + r\sin\theta\cos\phi\frac{\partial}{\partial y}
\end{aligned}
$$

から

$$
\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{\partial}{\partial \theta} \\ \frac{\partial}{\partial \phi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\phi & \sin\theta\sin\phi & \cos\theta \\ r\cos\theta\cos\phi & r\cos\theta\sin\phi & -r\sin\theta \\ -r\sin\theta\sin\phi & r\sin\theta\cos\phi & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}
$$

逆に解いて、(掛けてみて確認してみてください)

$$
\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\phi & \frac{1}{r}\cos\theta\cos\phi & -\frac{1}{r\sin\theta}\sin\phi \\ \sin\theta\sin\phi & \frac{1}{r}\cos\theta\sin\phi & \frac{1}{r\sin\theta}\cos\phi \\ \cos\theta & -\frac{1}{r}\sin\theta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{\partial}{\partial \theta} \\ \frac{\partial}{\partial \phi} \end{pmatrix}
$$

これを代入して

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \nabla_r \\ \nabla_\theta \\ \nabla_\phi \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\phi & \sin\theta\sin\phi & \cos\theta \\ \cos\theta\cos\phi & \cos\theta\sin\phi & -\sin\theta \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\phi & \frac{1}{r}\cos\theta\cos\phi & -\frac{1}{r\sin\theta}\sin\phi \\ \sin\theta\sin\phi & \frac{1}{r}\cos\theta\sin\phi & \frac{1}{r\sin\theta}\cos\phi \\ \cos\theta & -\frac{1}{r}\sin\theta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{\partial}{\partial \theta} \\ \frac{\partial}{\partial \phi} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{r\sin\theta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{\partial}{\partial \theta} \\ \frac{\partial}{\partial \phi} \end{pmatrix} \\
\boldsymbol{\nabla} &= \boldsymbol{e}_r\frac{\partial}{\partial r} + \boldsymbol{e}_\theta\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} + \boldsymbol{e}_\phi\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \phi}
\end{aligned}
$$

4.3 ケプラー問題

中心力 $F = K\boldsymbol{r}$ に対する質点の運動方程式は保存する角運動量ベクトルを z 軸とする極座標を用いて次のように書けます。

$$\ddot{r} - r(\dot{\theta})^2 = \frac{K}{m} r$$
$$\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) = 0$$

第 2 式からは

$$r^2\dot{\theta} = h = 一定, \quad \dot{\theta} = \frac{h}{r^2}$$

となりますが、これは角運動量保存則および面積速度一定を意味します。ここで運動する面の向きは $h > 0, \dot{\theta} > 0$ のようにとることとしましょう。

これから、ここで次の関係式が成立します。

$$\frac{d}{dt} = \frac{d\theta}{dt}\frac{d}{d\theta} = \dot{\theta}\frac{d}{d\theta} = \frac{h}{r^2}\frac{d}{d\theta}$$

特にポテンシャル力としての万有引力及びクーロン力の場合、

$$\boldsymbol{F} = k\frac{1}{r^2}\hat{\boldsymbol{r}} = k\frac{\boldsymbol{r}}{r^3} = K\boldsymbol{r}$$

ですから $K = k/r^3$ で $\mu = -\frac{k}{m}$ として ((万有) 引力の時 $\mu > 0$)

$$\ddot{r} - r(\dot{\theta})^2 = \ddot{r} - \frac{h^2}{r^3} = -\frac{\mu}{r^2}$$

と書け、ここで先ほど求めた時間微分を θ 微分で書き直す関係式を使えば

$$h^2\frac{1}{r^2}\frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{r^2}\frac{dr}{d\theta}\right) = \frac{h^2}{r^3} - \frac{\mu}{r^2}$$

となります。従属変数を r から $\xi = \dfrac{1}{r}$ に変換すれば $\dfrac{dr}{d\theta} = \dfrac{d}{d\theta}\dfrac{1}{\xi} = -\dfrac{1}{\xi^2}\dfrac{d\xi}{d\theta}$ なので

$$-\frac{d^2\xi}{d\theta^2} = \xi - \frac{\mu}{h^2}$$

これは基本的に単振動の微分方程式なので簡単に積分できて

$$\xi - \frac{\mu}{h^2} = A\cos(\theta + \theta_0)$$
$$書き直して \quad \frac{1}{r} = A\cos(\theta + \theta_0) + \frac{\mu}{h^2}$$

となります。ここで θ_0 は角度の原点ですから $A > 0$ となるようにとって

$$\frac{h^2}{\mu} = \ell > 0, \quad \frac{h^2 A}{\mu} = e > 0$$

とかいて

$$r = \frac{\ell}{1 + e\cos\theta}$$

これが質点の軌跡をあたえる方程式となります。e は離心率とよばれ、$0 < e < 1$ なら有限領域の運動、$1 < e$ なら無限遠まで広がった軌跡となります。

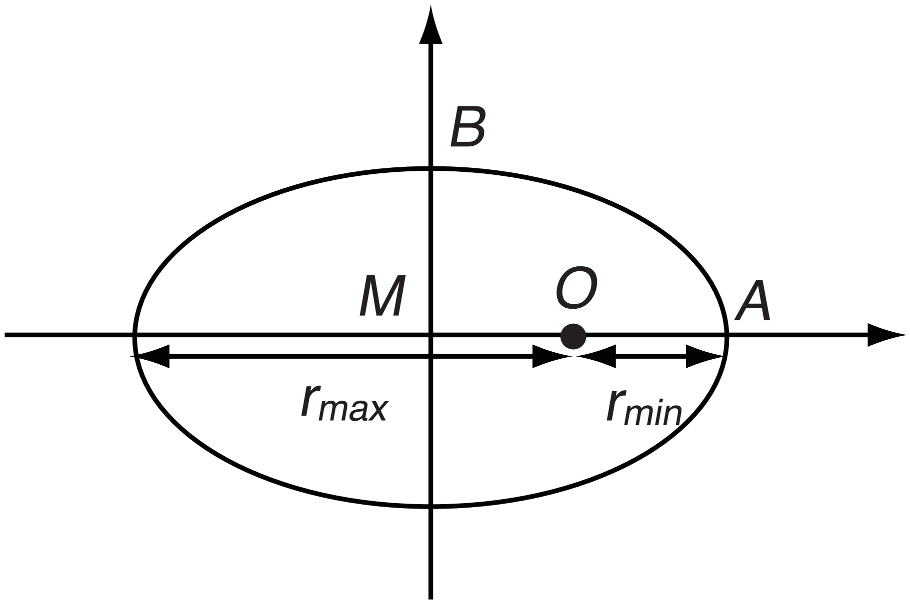

図 4.2: 楕円軌道

このパラメター表示された図形について考えてみましょう。まず、$0 < e < 1$ のとき、図 4.2 のように $\theta = 0, \pi$ の時の中点 M を直交軸の原点として座標系 (x, y) をとれば

$$\begin{aligned} x &= \overline{\mathrm{OM}} + r\cos\theta = \overline{\mathrm{OM}} + \ell\frac{\cos\theta}{1 + e\cos\theta} \\ y &= r\sin\theta = \ell\frac{\sin\theta}{1 + e\cos\theta} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
r_{max} =& \frac{\ell}{1-e}, \quad r_{min} = \frac{\ell}{1+e} \\
\overline{\mathrm{MA}} =& \frac{1}{2}(r_{max}+r_{min}) = \frac{1}{2}\left(\frac{\ell}{1-e}+\frac{\ell}{1+e}\right) = \ell\frac{1}{1-e^2} \\
\overline{\mathrm{MO}} =& \overline{\mathrm{MA}} - r_{min} = \ell\frac{e}{1-e^2}
\end{aligned}
$$

これを使って次の量を計算してみましょう。

$$
\begin{aligned}
x =& \ell\left(\frac{\cos\theta}{1+e\cos\theta}+\frac{e}{1-e^2}\right) \\
=& \ell\frac{1}{(1+e\cos\theta)(1-e^2)}\Big((1-e^2)\cos\theta+e+e^2\cos\theta\Big) \\
=& \ell\frac{e+\cos\theta}{(1+e\cos\theta)(1-e^2)} \\
x^2 =& \ell^2\frac{e^2+2e\cos\theta+\cos^2\theta}{(1+e\cos\theta)^2(1-e^2)^2} \\
x^2(1-e^2)+y^2 =& \ell^2\frac{e^2+2e\cos\theta+\cos^2\theta+(1-e^2)\sin^2\theta}{(1+e\cos\theta)^2(1-e^2)} \\
=& \ell^2\frac{e^2\cos^2\theta+2e\cos\theta+1}{(1+e\cos\theta)^2(1-e^2)} \\
=& \ell^2\frac{1}{1-e^2}
\end{aligned}
$$

これは $0<e<1$ の条件下では次のように書き直せます。

$$
\left(\frac{x}{\frac{\ell}{1-e^2}}\right)^2+\left(\frac{y}{\frac{\ell}{\sqrt{1-e^2}}}\right)^2 = 1
$$

これから質点の軌跡は長軸 $a=\frac{\ell}{1-e^2}$, 短軸 $b=\frac{\ell}{\sqrt{1-e^2}}$ の x 軸方向に扁平な楕円となることがわかります。これが惑星の運動に関する Kepler の第一法則です。この時、楕円の面積は

$$
S = \pi ab = \pi\ell^2(1-e^2)^{-3/2} = \pi\ell^2\left(\frac{\ell}{a}\right)^{-3/2} = \pi\sqrt{a^3\ell}
$$

となりますので、面積速度一定の関係をつかって面積速度が

$$
\frac{h}{2} = \frac{\sqrt{\ell\mu}}{2}
$$

より周期 T は

$$
T = 2\pi\sqrt{a^3\ell}/h = 2\pi\sqrt{\frac{a^3}{\mu}}
$$

となります。長軸 $a = \frac{r_{min}+r_{max}}{2}$ ですから焦点からの平均距離と考えられますので、楕円運動の周期は平均距離の 3/2 乗に比例することとなります。これは Kepler の第 3 法則とよばれます。

また、$e > 1$ の場合これは次のように書けますので、双曲線となります。

$$\left(\frac{x}{\frac{\ell}{e^2-1}}\right)^2 - \left(\frac{y}{\frac{\ell}{\sqrt{e^2-1}}}\right)^2 = 1$$

$e = 1$ の場合は

$$r = \frac{1}{1+\cos\theta}$$

ですから元々の座標系で

$$X = r\cos\theta = \frac{\cos\theta}{1+\cos\theta}$$
$$Y = r\sin\theta = \frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}$$

よって

$$Y^2 = \frac{\sin^2\theta}{(1+\cos\theta)^2} = \frac{1-\cos^2\theta}{(1+\cos\theta)^2} = \frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}$$
$$= 1 - \frac{\cos\theta}{1+\cos\theta} = 1 - X$$

つまり

$$X = 1 - Y^2$$

よって軌跡は放物線となります。

運動方程式の積分

次に運動方程式に $\dot{r}$ を書けて積分すれば

$$\int^t dt\left(\ddot{r}\right)\dot{r} = \int^t dt\left(\frac{h^2}{r^3} - \frac{\mu}{r^2}\right)\dot{r}$$
$$\frac{1}{2}(\dot{r})^2 = -\frac{1}{2}\frac{h^2}{r^2} + \frac{\mu}{r} + E$$

E は積分定数ですが、左辺は単位質点の運動エネルギーですので $r\to\infty$ を考えると E は単位質量を持つ質点の全力学的エネルギーと考えられます。これから

$$\frac{1}{2}(\dot{r})^2+W(r)=E,\quad W(r)=\frac{1}{2}\frac{h^2}{r^2}-\frac{\mu}{r}$$

とかくと $W(r)$ を実効的ポテンシャルとする 1 次元系と考えられますので、

$$\frac{dr}{dt}=\pm\frac{\sqrt{-h^2+2r\mu+2Er^2}}{r}=\pm\frac{\sqrt{q(r)}}{r}$$
$$q(r)=2Er^2+2r\mu-h^2=2E(r-\alpha)(r-\beta)$$

ここで $\pm$ は $\frac{dr}{dt}$ と同符号になるようにとります。また解と係数の関係から

$$\alpha+\beta=-\frac{\mu}{E}$$
$$\alpha\beta=-\frac{h^2}{2E}$$

となります。

図 4.3 より $E<0$ なら運動は有限区間 $[\alpha,\beta]$ に限られた周期的な運動、$E\geq 0$ なら運動できる領域は半無限に広がることがわかります。これを分けて順に考えてみましょう。

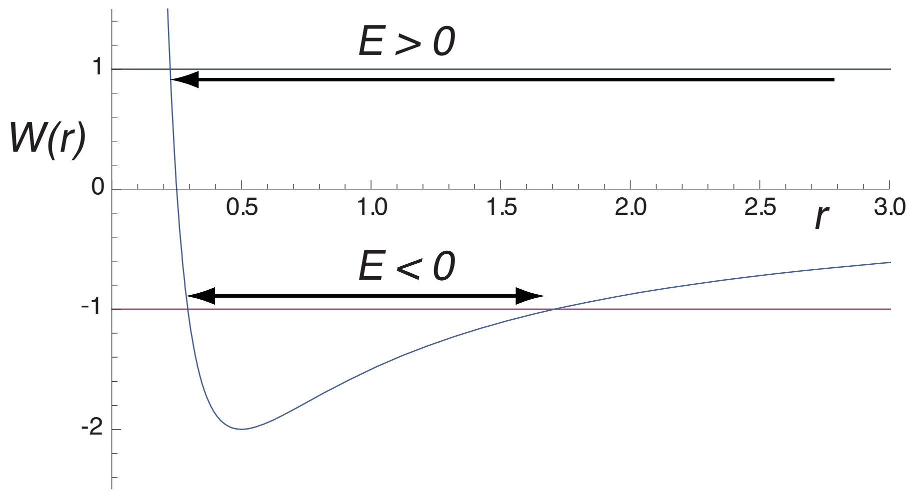

図 4.3: ケプラー問題の有効ポテンシャル

$E < 0$ の場合

この時 α, β は r の最小値と最大値となりますから $r = \ell/(1+e\cos\theta)$ より $0 < e < 1$ であり

$$\alpha = \frac{\ell}{1+e}, \quad \beta = \frac{\ell}{1-e}$$

と書けば、その平均を a として

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{2}\left(\frac{\ell}{1+e} + \frac{\ell}{1-e}\right) = \frac{\ell}{1-e^2} \\ \text{よって}\quad \ell &= a(1-e^2) \\ \alpha &= a(1-e), \quad \beta = a(1+e) \end{aligned}$$

となり、また解と係数の関係から

$$\begin{aligned} a &= -\frac{\mu}{2E} \\ a^2(1-e^2) &= -\frac{h^2}{2E} \end{aligned}$$

整理して

$$1 - e^2 = -\frac{h^2}{2E}\frac{4E^2}{\mu^2} = -\frac{2Eh^2}{\mu^2}$$

と離心率は決定されます。この時、

$$r = a(1 - e\cos u) \quad = \frac{\ell}{1 + e\cos\theta}$$

と変数変換すれば

$$\begin{aligned} \sqrt{q} &= \sqrt{-2E}\sqrt{(r - a(1-e))(a(1+e) - r)} \\ &= ae\sqrt{-2E}\sqrt{(1-\cos u)(1+\cos u)} = ae\sqrt{-2E}\sqrt{\sin^2 u} \\ \frac{dr}{dt} &= \pm\frac{\sqrt{q}}{r} = \pm\frac{ae}{r}\sqrt{-2E}|\sin u| \end{aligned}$$

となりますが、

$$\frac{dr}{du} = ae\sin u$$

の符号は $\sin u$ で決まり、

$$\frac{dr}{dt} = \dot{\theta}\frac{dr}{d\theta} = \dot{\theta}\frac{e\ell\sin\theta}{(1+e\cos\theta)^2}$$

で $\dot{\theta} > 0$ ですからこの符号は $\sin\theta$ となります。一方 u と θ の関係からこれらの増減は同じ向きとなります。以上から $\frac{dr}{dt}$ と $\sin u$ の符号は同じであることがわかるので

$$\frac{dr}{dt} = \frac{ae}{r}\sqrt{-2E}\sin u$$

と符号を含めて決定されます。

よって

$$\begin{aligned}
\int dt &= \frac{1}{\sqrt{-2E}ae}\int\frac{r}{\sin u}dr = \frac{a}{\sqrt{-2E}ae}\int\frac{r}{\sin u}\frac{dr}{du}du \\
&= \frac{a}{\sqrt{-2E}}\int(1-e\cos u)du \\
t &= \frac{a}{\sqrt{-2E}}(u - e\sin u)
\end{aligned}$$

これから周期運動の周期 T は $u: 0 \to 2\pi$ で与えられますから

$$T = \frac{2\pi a}{\sqrt{-2E}} = 2\pi\sqrt{\frac{a^3}{\mu}}$$

これは運動の周期は平均距離の 3/2 乗に比例することを意味します。これは Kepler の第３法則とよばれています。なお $r = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\theta}$ から $r + re\cos\theta = a - ae^2$ とかけ

$$\begin{aligned}
r\cos\theta &= ae^{-1} - ae - re^{-1} = ae^{-1} - ae - e^{-1}a(1-e\cos u) \\
&= a\cos u - ae
\end{aligned}$$

これから

$$\begin{aligned}
r^2\sin^2\theta &= r^2 - r^2\cos^2\theta \\
&= a^2(1-e\cos u)^2 - a^2(\cos u - e)^2 \\
&= a^2(1-e+(1-e)\cos u)(1+e-(1+e)\cos u) \\
&= a^2(1-e^2)(1+\cos u)(1-\cos u) = a(1-e^2)\sin^2 u
\end{aligned}$$

ここで $\sin u$ と $\sin\theta$ の符号は同じであることを思い出せば

$$r\sin\theta = a\sqrt{1-e^2}\sin u$$

まとめて質点の 2 次元座標 (x, y) として

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{1-e^2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos u \\ \sin u \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} ae \\ 0 \end{pmatrix}$$

これは中心が $(-ae, 0)$ にある楕円となります。つまりケプラー問題の質点はエネルギーが負の時、楕円運動を行います。