— 力学 A:演習問題 5 — 2011 年度 1 学期

未定義の記号は講義で用いた慣用に従って適宜解釈、定義せよ。

I. 円柱座標 $x = r\cos\phi,\ x = r\sin\phi,\ z = z$ を考える。

I.1 $r, \phi, z$ それぞれ、のみが増加する方向の単位ベクトル $\vec{e}_r,\ \vec{e}_\phi,\ \vec{e}_z$ を標準的な基底 $\vec{e}_1,\ \vec{e}_2,\ \vec{e}_3$ を用いて書け。これらがこの順で右手系をつくることを $\vec{e}_z = \vec{e}_r \times \vec{e}_\phi$ を計算して示せ。なお $\vec{e}_3 = \vec{e}_1 \times \vec{e}_2$ である。

I.2 $\mathcal{O} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, $\mathcal{O}_{r\phi z} = (\vec{e}_r, \vec{e}_\phi, \vec{e}_z) = \mathcal{O}T$ となる $3\times3$ 行列 $T$ を求めよ。

I.3 一般のベクトル $\vec{v}$ の標準基底での成分 $\boldsymbol{v}$ と円柱座標での成分 $\boldsymbol{v}_{r\phi z}$ との関係を導き、位置ベクトル $\vec{r}$ について確認せよ。

I.4 $\vec{\nabla}$ を円柱座標で表現しよう。

i. $\frac{\partial}{\partial r} = \frac{\partial x}{\partial r}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial r}\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial r}\frac{\partial}{\partial z}$ 等を具体的に計算し $\frac{\partial}{\partial x}$ などを $r, \phi, z$ で表せ。ヒント：$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \phi} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}$ を $\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}$ で表し、それを逆に解く。

ii. 円柱座標での $\vec{\nabla}$ の表示 $\vec{\nabla} = \vec{e}_r\dfrac{\partial}{\partial r} + \vec{e}_\phi\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial \phi} + \vec{e}_z\dfrac{\partial}{\partial z}$ を求めよ。

II. 中心力 $\vec{F}$ による質量 $m$ の質点の運動を考える。

II.1 $\vec{F}$ が中心力であるとは何か述べよ。

II.2 中心力による運動では 角運動量 $\boldsymbol{L} = \vec{r} \times \vec{p}$, ( $\vec{p}$ は運動量) が運動の定数であることを示せ。

II.3 時刻 $t$ において質点が $yz$ 平面上 $(0, s, s), s \neq 0$ にあり、速度ベクトルが $y$ 軸正方向を向いているとき、保存する角運動量はどちら向きか。

II.4 $\vec{L}$ 方向に $z$ 軸をとり円柱座標で考える。

i. 角運動量保存則を円柱座標で成分を用いて示せ。

ii. 面積一定の法則とは何か

iii. ばね定数 $k$ のバネでつながれた質点の運動を円柱座標で議論せよ。

III. 極座標 $x = r\sin\theta\cos\phi$, $x = r\sin\theta\sin\phi$, $z = r\cos\theta$ を考える。

III.1 全空間を表現するために必要な $r, \theta, \phi$ の取り得る値は何か。

III.2 $r, \theta, \phi$ それぞれ、のみが増加する方向の単位ベクトル $\vec{e}_r$, $\vec{e}_\theta$, $\vec{e}_\phi$ を標準的な基底 $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ を用いて書け。これらがこの順で右手系をつくることを $\vec{e}_\phi = \vec{e}_r \times \vec{e}_\theta$ を計算して示せ。

III.3 $\mathcal{O} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, $\mathcal{O}_{r\theta\phi} = (\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\phi) = \mathcal{O}T$ となる $3\times 3$ 行列 $T$ を求めよ。

III.4 一般のベクトル $\vec{v}$ の標準基底での成分 $\boldsymbol{v}$ と円柱座標での成分 $\boldsymbol{v}_{r\theta\phi}$ との関係を導き、位置ベクトルについて確認せよ。

III.5 極座標での $\vec{\nabla}$ の表示 $\vec{\nabla} = \vec{e}_r\dfrac{\partial}{\partial r} + \vec{e}_\theta\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial\theta} + \vec{e}_\phi\dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial}{\partial\phi}$ を求めよ。

VI. $x, y, z$ の間の関数関係を $x = x(y, z)$, $y = y(z, x)$, $z = z(x, y)$ としたとき, 例えば $y$ を一定としたときの偏微分を $\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)_y$ などと書こう。

IV.1 $\delta z = \left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)_y \delta x + \left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)_x \delta y$ から $\delta z = 0$ として, 以下の関係式を導け

$$\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_z = -\frac{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y}{\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x}$$

IV.2 IV.1 で $\delta x = 0$ とすればどんな関係式が導かれるか？

IV.3 以下の関係式を導け

$$\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y = -1$$

V. 東京（北緯 $\theta$ 東経 $\phi$）における質点の自由落下を解析しよう。

V.1 $\vec{g}$ を重力加速度ベクトルとして質量 $m$ の質点の運動方程式 $m\ddot{\vec{r}} = m\vec{g}$ を座標によらない形で解け。

V.2 この東京での自由落下を東京と同じ経度であり赤道上の点での座標系（$xy$ 平面を水平面、$x$ 軸を地球の自転方向に $z$ 軸を天井方向）としたもので成分を用いて解析せよ。