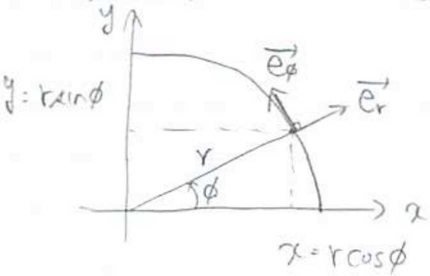
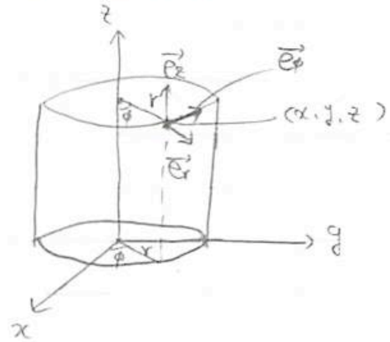
第11回　　201110889　　八木 俊輔

座標変換の例

円柱座標　　　2D極座標





$$\begin{cases} x = r\cos\phi \\ y = r\sin\phi \\ z = z \end{cases}$$

任意のvector $\vec{v}$

$$\vec{v} = \vec{e}_1' v_x + \vec{e}_2' v_y + \vec{e}_3' v_z$$

$$= (\vec{e}_1', \vec{e}_2', \vec{e}_3') \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = \Theta v \qquad \Theta = (\vec{e}_1', \vec{e}_2', \vec{e}_3')$$

$$= (\vec{e}_r', \vec{e}_\phi', \vec{e}_z') \begin{pmatrix} v_r \\ v_\phi \\ v_z \end{pmatrix} = \Theta_{r\phi z} v_{r\phi z}$$

$$\Theta_{r\phi z} = (\vec{e}_r', \vec{e}_\phi', \vec{e}_z') = \underbrace{(\vec{e}_1', \vec{e}_2', \vec{e}_3')}_{\Theta} \underbrace{(e_r, e_\phi, e_z)}_{T}$$

$$\vec{e}_r' = \Theta e_r \qquad e_r = \begin{pmatrix} \cos\phi \\ \sin\phi \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{e}_\phi' = \Theta e_\phi \qquad \vec{e}_\phi' = \begin{pmatrix} -\sin\phi \\ \cos\phi \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{e}_z' = \Theta e_z \qquad e_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$T = \left((e_r), (e_\phi), (e_z) \right) = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Theta v = \Theta_{r\phi z} v_{r\phi z} = \Theta T v_{r\phi z}$$

$$v = T v_{r\phi z}$$

$${}^tT T = E_3 \;\Downarrow\; {}^tT = T^{-1}$$

$v_{r\phi z} = T^{-1} v = {}^tT v$ ← 一般のvector $\vec{v}$について

速度vector ($\vec{r}$にある質点の)

$$\vec{V} = \dot{\vec{r}} = \Theta \mathbf{V} = \Theta \dot{\mathbf{r}}$$

$$\mathbf{V} = \dot{\mathbf{r}} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{r}\cos\phi - r\dot{\phi}\sin\phi \\ \dot{r}\sin\phi + r\dot{\phi}\cos\phi \\ \dot{z} \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{V}_{r\phi z} = \hat{T}\mathbb{V} = \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi & 0 \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{r}\cos\phi - r\dot{\phi}\sin\phi \\ \dot{r}\sin\phi + r\dot{\phi}\cos\phi \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{r} \\ r\dot{\phi} \\ \dot{z} \end{pmatrix}$$

$$\vec{V} = \vec{e}_r\dot{r} + \vec{e}_\phi r\dot{\phi} + \vec{e}_z \cdot \dot{z}$$

$$\vec{\alpha} = \ddot{\vec{r}} = \Theta\mathbb{a} \qquad \mathbb{a} = \ddot{\mathbb{r}} = \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * \\ * \\ * \end{pmatrix}$$

$$\vec{\alpha} = \vec{e}_r(\ddot{r} - r\dot{\phi}^2) + \vec{e}_\phi(2\dot{r}\dot{\phi} + r\ddot{\phi}) + \vec{e}_z\ddot{z}$$

$$\mathbb{a}_{r\phi z} = \hat{T}\mathbb{a} = \begin{pmatrix} \ddot{r} - r\dot{\phi}^2 \\ 2\dot{r}\dot{\phi} + r\ddot{\phi} \\ \ddot{z} \end{pmatrix}$$

☆ 中心力の下での運動

質点に働く力 $\vec{F} \propto \vec{r}$
中心力という。

$\vec{F} = k\vec{r}$ 　 $\underset{\text{スカラー}}{k}$ は $\vec{r}$ に依存してもよい

$\vec{F} = m\ddot{\vec{r}} = \dot{\vec{p}}$ 　 $\vec{p} = m\vec{v} = m\dot{\vec{r}}$ 　（運動量）

$\vec{r} \times \vec{F} = \vec{r} \times \dot{\vec{p}}$

$\vec{F} = k\vec{r}$ 　 $\vec{r} \times \vec{F} = k\vec{r} \times \vec{r} = \vec{0}$

$$\vec{0} = \vec{r} \times \dot{\vec{p}} = \vec{r} \times \frac{d}{dt}\vec{p} = \frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{p}) - \underbrace{\frac{d\vec{r}}{dt} \times \overset{m\frac{d\vec{r}}{dt}}{\vec{p}}}_{\vec{0}}$$

$\vec{F} \propto \vec{r}$ なら（中心力のみが働く場合）

$\vec{0} = \frac{d\vec{L}}{dt}$ 　 $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$：角運動量
（運動量のモーメント）

$\vec{L} = \vec{C}$（定数vector）

角運動量は定数vector：時間に依存しない
保存量、運動の定数

第11回

$\vec{F}$ を円柱座標で表現する, $\longrightarrow$ $\vec{F} = F_r \vec{e_r}$ （$\vec{e_\phi}$, $\vec{e_z}$ は現れない）
↑
中心力
$F_\phi = 0$ $F_z = 0$

成分ごとの運動方程式 $F_r = m a_r$ ⊛

$0 = F_\phi = m a_\phi = m(2\dot r\dot\phi + r\ddot\phi)$

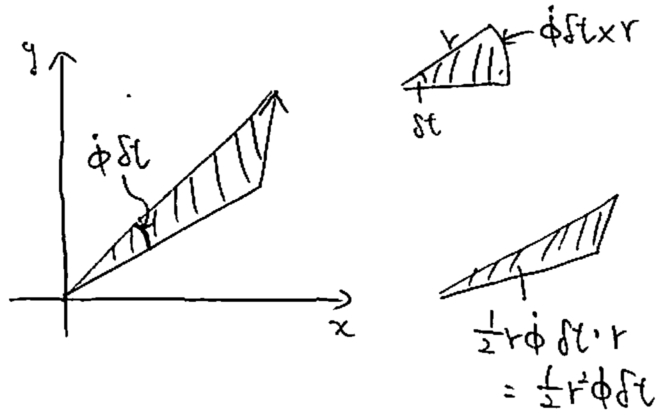
$0 = F_z = m a_z = m\ddot z$

$0 = m\ddot z \longrightarrow z = v_z t + z_0$ z方向へは等速度運動.

$$2\dot r\dot\phi + r\ddot\phi = \frac{1}{r}(2r\dot r\dot\phi + r^2\ddot\phi) = \underbrace{\frac{1}{r}\frac{d}{dt}r^2\dot\phi}_{\frac{1}{r}(2r\dot r\dot\phi + r^2\ddot\phi)}$$

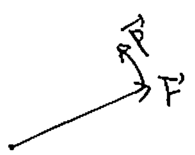
$F_\phi = 0 = m\frac{1}{r}\frac{d}{dt}r^2\dot\phi$

$\frac{d}{dt}r^2\dot\phi = 0$ $r^2\dot\phi$: 定数

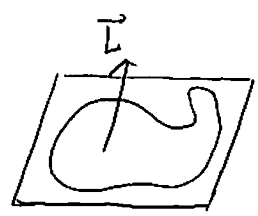


単位時間あたり動径が通る部分の面積は一定.
（面積速度一定の法則）

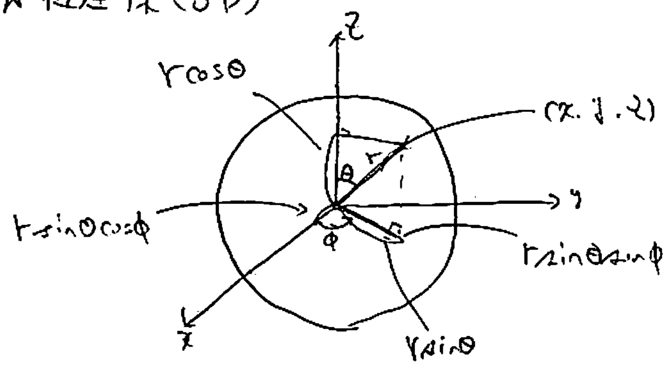
中心力 $\longrightarrow$ $L = \vec{r}\times\vec{p}$ （一定）



$L \perp \vec{r}$, $L \perp \vec{p}$ } $\longrightarrow$ 質点は $\vec{L}$ を法線とする平面内の運動を行う



★極座標（3D）



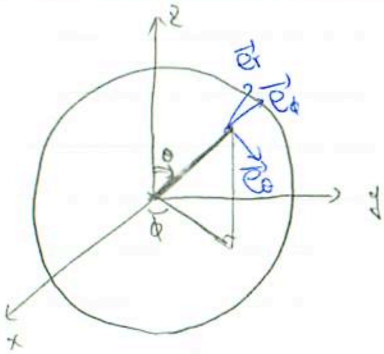
$x = r\sin\theta\cos\phi$
$y = r\sin\theta\sin\phi$
$z = r\cos\theta$

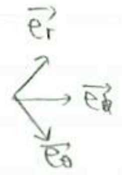
θ : $0 \longrightarrow \pi$
緯度 ↑北極 ↑南極

ϕ : $0 \longrightarrow 2\pi$
経度 $-\pi \to \pi$

NO 4

DATE





$(\vec{e_r}, \vec{e_\theta}, \vec{e_\phi})$: 右手系.

$$\vec{e_r} = \widehat{\frac{\partial \vec{r}}{\partial r}} = \Theta \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r} = \Theta \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\phi \\ \sin\theta\sin\phi \\ \cos\theta \end{pmatrix} \qquad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r} = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\phi \\ \sin\theta\sin\phi \\ \cos\phi \end{pmatrix}$$

$$\left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r}\right|^2 = \sin^2\theta\,(\cos^2\phi + \sin^2\phi) + \cos^2\theta = \underline{1}$$

$$\vec{e_\theta} = \widehat{\frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta}} = \Theta \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} \qquad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} = \begin{pmatrix} r\cos\theta\cos\phi \\ r\cos\theta\sin\phi \\ -r\sin\theta \end{pmatrix} \qquad \vec{e_\theta} = \Theta \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\phi \\ \cos\theta\sin\phi \\ -\sin\theta \end{pmatrix}$$

$$\vec{e_\phi} = \widehat{\frac{\partial \vec{r}}{\partial \phi}} = \Theta \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \phi} \qquad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \phi} = \begin{pmatrix} -r\sin\theta\sin\phi \\ r\sin\theta\cos\phi \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \phi}\right|^2 = r^2\sin^2\theta \qquad \left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \phi}\right| = r\sin\theta \qquad \vec{e_\phi} = \Theta \begin{pmatrix} -\sin\phi \\ \cos\phi \\ 0 \end{pmatrix}$$

任意のvector $\vec{v}$

$$(\vec{e_r}, \vec{e_\theta}, \vec{e_\phi}) = \Theta\,\underbrace{\big((e_r)\ (e_\theta)\ (e_\phi)\big)}$$

$$T = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\phi & \cos\theta\cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\theta\sin\phi & \cos\theta\sin\phi & \cos\phi \\ \cos\theta & -\sin\theta & 0 \end{pmatrix}$$

$${}^t T\,T = E,\quad \text{直交行列}$$