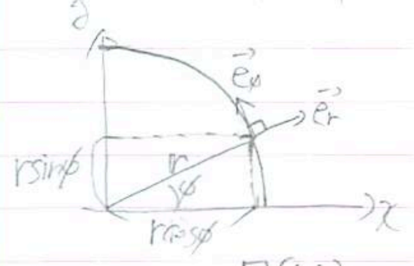
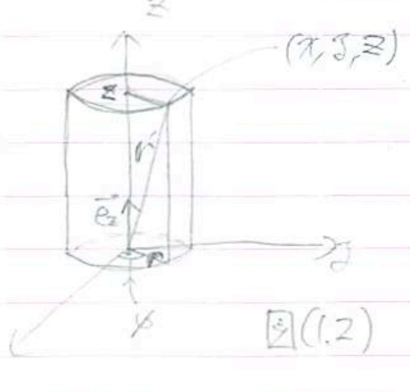
力学A

座標変換の例

円柱座標、2D極座標



図(1.1)

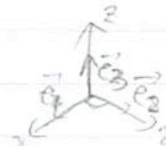


図(1.2)

$$x = r\cos\phi \quad y = r\sin\phi \quad z = z$$

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} r\cos\phi \\ r\sin\phi \\ z \end{pmatrix}$$

任意のベクトル $\vec{v}$



$$\vec{v} = \vec{e}_1 v_x + \vec{e}_2 v_y + \vec{e}_3 v_z = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = \Theta \mathbf{v} \quad -(1\text{-}1)$$

$$\Theta = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$$

$$= (\vec{e}_r, \vec{e}_\phi, \vec{e}_z)\begin{pmatrix} v_r \\ v_\phi \\ v_z \end{pmatrix} = \Theta_{r\phi z} \mathbf{v}_{r\phi z} - (1\text{-}2)$$

$$\Theta_{r\phi z} = (\vec{e}_r, \vec{e}_\phi, \vec{e}_z)$$

図(1.1)と図(1.2)からわかるように

$$\vec{e}_r = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)\begin{pmatrix} |\vec{e}_r|\cos\phi \\ |\vec{e}_r|\sin\phi \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{e}_\phi = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)\begin{pmatrix} -|\vec{e}_\phi|\sin\phi \\ |\vec{e}_\phi|\cos\phi \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{e}_z = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$|\vec{e}_r| = |\vec{e}_\phi| = 1$ である。

よって

$$\Theta_{r\phi z} = (\vec{e}_r, \vec{e}_\phi, \vec{e}_z) = \Theta\begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \Theta T \quad - (1\text{-}3)$$

式(1-1), (1-2), (1-3)より

$$\Theta v = \Theta_{r\phi z} v_{r\phi z} = \Theta T v_{r\phi z} \Rightarrow v = T v_{r\phi z}$$

$\hat{T} \cdot T = E_3$

$\hat{T} = T^{-1}$

T: 直交行列

$$v_{r\phi z} = T^{-1} v = \hat{T} v \quad -(1-4)$$

↑ 一般のベクトル v について

速度ベクトル ($\vec{r}$にある質点の)

$$\vec{V} = \dot{\vec{r}} = \Theta \mathbb{V} = \Theta \dot{\mathbb{r}}$$

$$\mathbb{V} = \dot{\mathbb{r}} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{r}\cos\phi - r\dot{\phi}\sin\phi \\ \dot{r}\sin\phi + r\dot{\phi}\cos\phi \\ \dot{z} \end{pmatrix}$$

式(1-4)より

$$\mathbb{V}_{r\phi z} = \hat{T}\mathbb{V} = \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi & 0 \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{r}\cos\phi - r\dot{\phi}\sin\phi \\ \dot{r}\sin\phi + r\dot{\phi}\cos\phi \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{r} \\ r\dot{\phi} \\ \dot{z} \end{pmatrix}$$

$$\vec{V} = \vec{e_r}\dot{r} + \vec{e_\phi} r\dot{\phi} + \vec{e_z}\dot{z}$$

$$\vec{a} = \ddot{\vec{r}} = \Theta \mathbb{a}$$

$$\mathbb{a} = \ddot{\mathbb{r}} = \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * \\ * \\ * \end{pmatrix}$$

$$\vec{a} = \vec{e_r}(\ddot{r} - r\dot{\phi}^2) + \vec{e_\phi}(2\dot{r}\dot{\phi} + r\ddot{\phi}) + \vec{e_z}\cdot\ddot{z}$$

$$\mathbb{a}_{r\phi z} = \hat{T}\mathbb{a} = \begin{pmatrix} \ddot{r} - r\dot{\phi}^2 \\ 2\dot{r}\dot{\phi} + r\ddot{\phi} \\ \ddot{z} \end{pmatrix}$$

☆ 中心力の下での運動

← ・———————— × m(質点)

質点に働らく力 $\vec{F} \propto \vec{r}$ 中心力という

$\vec{F} = k\vec{r}$ 　　 k は $\vec{r}$ に依存してもよい
　　　　　　　　 ↑ スカラー

$\vec{F} = m\ddot{\vec{r}} = \dot{\vec{p}}$ 　, $\vec{p} = m\vec{v} = m\dot{\vec{r}}$ 運動量

$\vec{r} \times \vec{F} = \vec{r} \times \dot{\vec{p}}$

$\vec{F} = k\vec{r}$, $\vec{r} \times \vec{F} = k\vec{r} \times \vec{r} = \vec{0}$

$$\vec{0} = \vec{r} \times \dot{\vec{p}} = \vec{r} \times \frac{d}{dt}\vec{p}$$

$$= \frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{p}) - \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p}$$

($\vec{p} = m\frac{d\vec{r}}{dt}$ より $\frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} = \vec{0}$)

$\vec{F} \propto \vec{r}$ なら(中心力のみが働らく場合)

$\vec{0} = \frac{d\vec{L}}{dt}$, $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ ：角運動量(運動量のモーメント)

→ 角運動量は定数ベクトル ；時間に依存しない, 保存量 運動の定数

$\vec{L} = \vec{C}$
(定数ベクトル)

$\vec{F}$を円柱座標で表現
中心力

$$\vec{F} = F_r \vec{e}_r \quad (\vec{e}_\phi, \vec{e}_z \text{は現れない})$$

$$F_\phi = 0, \quad F_z = 0$$

成分ごとの運動方程式 ※

$$F_r = m a_r$$

$$0 = F_\phi = m a_\phi = m(2\dot{r}\dot{\phi} + r\ddot{\phi})$$

$$0 = F_z = m a_z = m\ddot{z}$$

$$0 = m\ddot{z} \longrightarrow z = v_z t + z_0$$

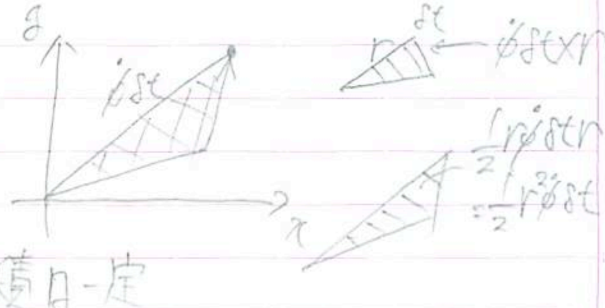
z方向へは等速度運動

$$2\dot{r}\dot{\phi} + r\ddot{\phi} = \frac{1}{r}(2r\dot{r}\dot{\phi} + r^2\ddot{\phi})$$

$$= \underbrace{\frac{1}{r}\frac{d}{dt}r^2\dot{\phi}}_{\frac{1}{r}(2r\dot{r}\dot{\phi} + r^2\ddot{\phi})}$$

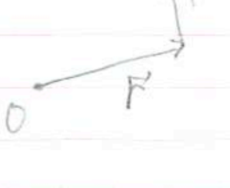
$$F_\phi = 0 = m\frac{1}{r}\frac{d}{dt}r^2\dot{\phi}$$

$$\frac{d}{dt}r^2\dot{\phi} = 0, \quad r^2\dot{\phi} = \text{定数}$$

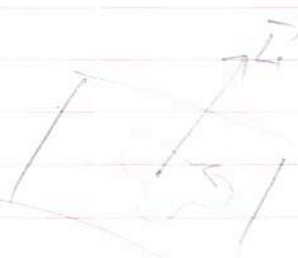


単位時間あたり動径が通る部分の面積は一定
面積速度一定の法則

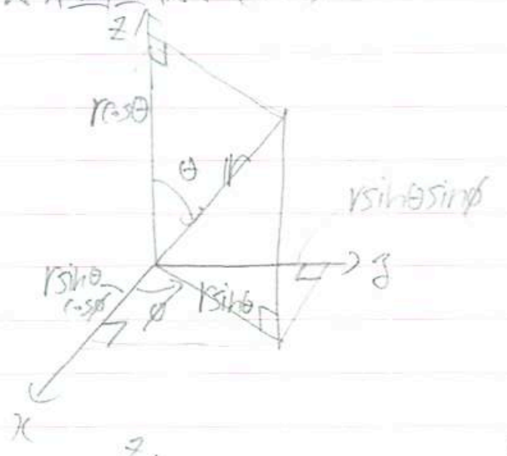
中心力 → $L = \vec{r}\times\vec{p}$ 一定



$L \perp \vec{r}$, $L \perp \vec{p}$ → 軌道は$\vec{L}$を法線とする平面内の運動となる



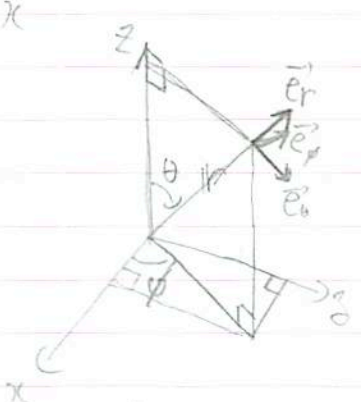
☆極座標 (3D)

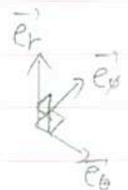


$x = r\sin\theta\cos\phi$
$y = r\sin\theta\sin\phi$
$z = r\cos\theta$

$\phi: 0 \to 2\pi$
$-\pi \to \pi$ 経度

$\theta: 0 \to \pi$ 緯度
($\theta = 0$: 北極, $\theta = \pi$: 南極)





$(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\phi)$: 右手系

$\vec{e}_r = \widehat{\frac{d\mathbf{r}}{dr}} = \Theta \widehat{\frac{d\mathbf{r}}{dr}} = \Theta \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\phi \\ \sin\theta\sin\phi \\ \cos\theta \end{pmatrix}$

$\mathbf{r}' = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)\mathbf{r} = \Theta\mathbf{r}$

$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\sin\theta\cos\phi \\ r\sin\theta\sin\phi \\ r\cos\theta \end{pmatrix}$

$\frac{d\mathbf{r}}{dr} = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\phi \\ \sin\theta\sin\phi \\ \cos\theta \end{pmatrix}$ $\quad \left|\frac{d\mathbf{r}}{dr}\right|^2 = \sin^2\theta(\cos^2\phi + \sin^2\phi) + \cos^2\theta = 1$

$\vec{e}_\theta = \widehat{\frac{d\mathbf{r}}{d\theta}} = \Theta \widehat{\frac{d\mathbf{r}}{d\theta}}$ $\quad \frac{d\mathbf{r}}{d\theta} = \begin{pmatrix} r\cos\theta\cos\phi \\ r\cos\theta\sin\phi \\ -r\sin\theta \end{pmatrix}$ $\quad \left|\frac{d\mathbf{r}}{d\theta}\right|^2 = r^2 \quad \left|\frac{d\mathbf{r}}{d\theta}\right| = r$

$= \Theta \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\phi \\ \cos\theta\sin\phi \\ -\sin\theta \end{pmatrix}$

$\vec{e}_\phi = \widehat{\frac{d\mathbf{r}}{d\phi}} = \Theta \widehat{\frac{d\mathbf{r}}{d\phi}}$ $\quad \frac{d\mathbf{r}}{d\phi} = \begin{pmatrix} -r\sin\theta\sin\phi \\ r\sin\theta\cos\phi \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad \left|\frac{d\mathbf{r}}{d\phi}\right|^2 = r^2\sin^2\theta \quad \left|\frac{d\mathbf{r}}{d\theta}\right| = r\sin\theta$

$= \Theta \begin{pmatrix} -\sin\phi \\ \cos\phi \\ 0 \end{pmatrix}$

任意のベクトル $\vec{v}$

$$(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\phi) = \Theta \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} e_r \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} e_\theta \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} e_\phi \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

$$\vec{v} = \Theta v = \Theta_{r\theta\phi} v_{r\theta\phi}$$

$$T = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\phi & \cos\theta\cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\theta\sin\phi & \cos\theta\sin\phi & \cos\phi \\ \cos\theta & -\sin\theta & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \Theta T v_{r\theta\phi}$$

$$v = T_{r\theta\phi} v_{r\theta\phi}$$

$$\hat{T} \cdot T = E_3$$

直交行列