力学A レポート

200810934 姫野健彦

I,1 質点とは，質量があって大きさのないもの。
質量を唯一の個性としたもの。

I,2 多種多様なものを質点と理想化して考えることにより，共通の運動に関する普遍的な性質(普遍性)を見出すことができる。
(例えば石と太陽は材質も，色も，大きさも違うが，質点として考え情報を縮約することにより，共通の性質を見つけることができる。)

I,3 自然界に全く同じ物は存在しない。だからこそその中にひそむ共通の性質を見つけること(普遍性を見出すこと)は大切なのであり，1つ1つのものについてしか考えなかったら，それはその他のものに応用できず意味はない。

I,4 電車の運動の記述に量子力学を適用した場合，力学を使った記述との差は誤差の範囲内であるため意味はない。計算が煩雑になるだけなのでむしろ適した方法ではない。

II.1 $z = x + iy = r\cos\theta + ir\sin\theta = re^{i\theta}$

$r = |z| = \sqrt{x^2+y^2}$

$\boxed{1}$ $r = \sqrt{1^2+0^2} = 1$

$1 = 1 \times \cos 0 + i \times 1 \times \sin 0 = 1 \times e^{i\times 0} = \underline{e^0}$ //

$\boxed{i}$ $r = \sqrt{0^2+1^2} = 1$

$i = 1 \times \cos\frac{\pi}{2} + i \times 1 \times \sin\frac{\pi}{2} = 1 \times e^{i\times\frac{\pi}{2}} = \underline{e^{i\frac{\pi}{2}}}$ //

$\boxed{1+i}$ $r = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$

$1+i = \sqrt{2} \times \cos\frac{\pi}{4} + i \times \sqrt{2} \times \sin\frac{\pi}{4} = \sqrt{2} \times e^{i\times\frac{\pi}{4}} = \underline{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}}$ //

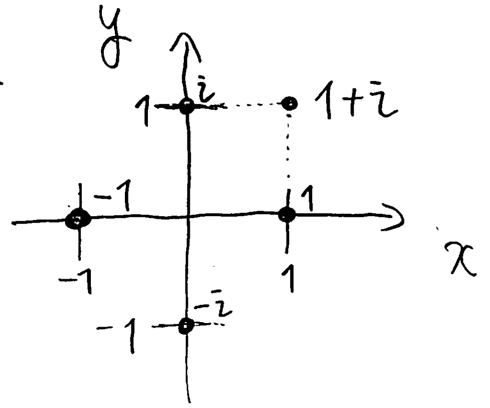
$\boxed{-1}$ $r = \sqrt{(-1)^2+0^2} = 1$

$-1 = 1 \times \cos\pi + i \times 1 \times \sin\pi = 1 \times e^{i\times\pi} = \underline{e^{i\pi}}$ //

$\boxed{-i}$ $r = \sqrt{0^2+(-1)^2} = 1$

$-i = 1 \times \cos\frac{3}{2}\pi + i \times 1 \times \sin\frac{3}{2}\pi = 1 \times e^{i\times\frac{3}{2}\pi} = \underline{e^{i\frac{3}{2}\pi}}$ //

II, 2



II, 3 $re^{i\theta} = r\cos\theta + ir\sin\theta$

$\boxed{e^0} = 1 \times \cos 0 + i \times 1 \times \sin 0 = \underline{1}$ //

$\boxed{e^{i\pi}} = 1 \times \cos\pi + i \times 1 \times \sin\pi = \underline{-1}$ //

$\boxed{e^{i\frac{\pi}{2}}} = 1 \times \cos\frac{\pi}{2} + i \times 1 \times \sin\frac{\pi}{2} = \underline{i}$ //

$\boxed{e^{-i\frac{\pi}{2}}} = 1 \times \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i \times 1 \times \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \underline{-i}$ //

$\boxed{e^{1-i\frac{2}{3}\pi}} = e \times e^{-i\frac{2}{3}\pi} = e \times \cos\left(-\frac{2}{3}\pi\right) + i \times e \times \sin\left(-\frac{2}{3}\pi\right)$

$= -\frac{1}{2}e - \frac{\sqrt{3}}{2}ei = \underline{-\frac{1}{2}e(1+\sqrt{3}i)}$ //

II, 4

$\boxed{(1+i)^{1000}}$ $\quad 1+i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}, (1+i)^{1000} = (\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}})^{1000}$

$= \sqrt{2}^{1000} e^{i\frac{\pi}{4} \times 1000} = 2^{500} e^{i\,250\pi} = 2^{500} e^{0i + 125\pi i \times 2} = 2^{500} e^{0} = \underline{2^{500}}$ //

$\boxed{(1+i\sqrt{3})^{1000}}$ $\quad 1+i\sqrt{3} = 2e^{i\frac{\pi}{3}}, (1+i\sqrt{3})^{1000} = (2e^{i\frac{\pi}{3}})^{1000}$

$= 2^{1000} e^{i\frac{\pi}{3} \times 1000} = 2^{1000} e^{i\frac{1000}{3}\pi} = 2^{1000} e^{i\frac{4}{3}\pi + 166\pi i \times 2} = 2^{1000} e^{i\frac{4}{3}\pi}$

$= 2^{1000} \cos\frac{4}{3}\pi + i\, 2^{1000} \sin\frac{4}{3}\pi = -2^{1000}\frac{1}{2} - i\, 2^{1000}\frac{\sqrt{3}}{2} = \underline{-(2^{999} + i\, 2^{999}\sqrt{3})}$ //

II, 5 $\quad e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$

$e^{-i\theta} = e^{i(-\theta)} = \cos(-\theta) + i\sin(-\theta) = \cos\theta - i\sin\theta$

$e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 2\cos\theta$

$\underline{\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}}$ //

$e^{i\theta} - e^{-i\theta} = 2i\sin\theta$

$\underline{\sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}}$ //

$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \times \frac{2}{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}$

$\underline{= \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{i(e^{i\theta} + e^{-i\theta})}}$ //

II,6 $\sin(\alpha+\beta) = \dfrac{e^{i(\alpha+\beta)} - e^{-i(\alpha+\beta)}}{2i} = \dfrac{e^{i\alpha}e^{i\beta} - e^{-i\alpha}e^{-i\beta}}{2i}$

$$= \frac{e^{i\alpha}e^{i\beta} + e^{i\alpha}e^{i\beta} - e^{-i\alpha}e^{-i\beta} - e^{-i\alpha}e^{-i\beta}}{4i}$$

$$= \frac{1}{4i}\Big(e^{i\alpha}e^{i\beta} + e^{i\alpha}e^{i\beta} - e^{-i\alpha}e^{-i\beta} - e^{-i\alpha}e^{-i\beta}$$
$$+ e^{i\alpha}e^{-i\beta} - e^{i\alpha}e^{-i\beta} + e^{-i\alpha}e^{i\beta} - e^{-i\alpha}e^{i\beta}\Big)$$

$$= \frac{1}{4i}\Big(e^{i\alpha}e^{i\beta} + e^{i\alpha}e^{-i\beta} - e^{-i\alpha}e^{i\beta} - e^{-i\alpha}e^{-i\beta}$$
$$+ e^{i\alpha}e^{i\beta} - e^{i\alpha}e^{-i\beta} + e^{-i\alpha}e^{i\beta} - e^{-i\alpha}e^{-i\beta}\Big)$$

$$= \frac{(e^{i\alpha} - e^{-i\alpha})(e^{i\beta} + e^{-i\beta})}{4i} + \frac{(e^{i\alpha} + e^{-i\alpha})(e^{i\beta} - e^{-i\beta})}{4i}$$

$$= \frac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{2i} \cdot \frac{e^{i\beta} + e^{-i\beta}}{2} + \frac{e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}}{2} \cdot \frac{e^{i\beta} - e^{-i\beta}}{2i}$$

$$= \underline{\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta} \;//$$

$\cos(\alpha+\beta) = \dfrac{e^{i(\alpha+\beta)} + e^{-i(\alpha+\beta)}}{2} = \dfrac{e^{i\alpha}e^{i\beta} + e^{-i\alpha}e^{-i\beta}}{2}$

$$= \frac{e^{i\alpha}e^{i\beta} + e^{i\alpha}e^{i\beta} + e^{-i\alpha}e^{-i\beta} + e^{-i\alpha}e^{-i\beta}}{4}$$

$$= \frac{1}{4}\Big(e^{i\alpha}e^{i\beta} + e^{i\alpha}e^{i\beta} + e^{-i\alpha}e^{-i\beta} + e^{-i\alpha}e^{-i\beta}$$
$$+ e^{i\alpha}e^{-i\beta} - e^{i\alpha}e^{-i\beta} + e^{-i\alpha}e^{i\beta} - e^{-i\alpha}e^{i\beta}\Big)$$

$$= \frac{1}{4}\Big(e^{i\alpha}e^{i\beta} + e^{i\alpha}e^{-i\beta} + e^{-i\alpha}e^{i\beta} + e^{-i\alpha}e^{-i\beta}$$
$$+ e^{i\alpha}e^{i\beta} - e^{i\alpha}e^{-i\beta} - e^{-i\alpha}e^{i\beta} + e^{-i\alpha}e^{-i\beta}\Big)$$

$$= \frac{(e^{i\alpha}+e^{-i\alpha})(e^{i\beta}+e^{-i\beta})}{4} + \frac{(e^{i\alpha}-e^{-i\alpha})(e^{i\beta}-e^{-i\beta})}{4}$$

$$= \frac{e^{i\alpha}+e^{-i\alpha}}{2} \cdot \frac{e^{i\beta}+e^{-i\beta}}{2} - \frac{e^{i\alpha}-e^{-i\alpha}}{2i} \cdot \frac{e^{i\beta}-e^{-i\beta}}{2i}$$

$$= \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$ //

II.7　$z = \theta + 2\pi i \cdot n$ とおく

$$e^z = e^{\theta + 2\pi i \cdot n} = e^{\theta} \cdot e^{i \times 2\pi n}$$

$$= e^{\theta}(\cos 2\pi n + i \sin 2\pi n)$$

$$= e^{\theta}(1 + i \times 0) = e^{\theta}$$

よって e^z は周期 $2\pi i$ の周期関数である。//

II.8　$e^z = 1$

$$\log e^z = \log 1$$

$$z \log e = \log 1$$

$$z = 0$$

よって $z=0$ は特解である。

一般解は II.7 より，

$$z = 0 + 2\pi i n = 2\pi i n$$

$$z = 2\pi i n$$ //

III.1 $x=x(t)$ についての微分方程式 $\ddot{x}=0$ が線型微分方程式であるというのは，$x=x_1(t)$，$x=x_2(t)$ が解なら，C_1, C_2 を任意定数として $x=C_1x_1(t)+C_2x_2(t)$ も解となるということ。

III.2 $\ddot{x}(t)=0$ の解は一般的に C_1, C_2 を任意定数として $x=C_1t+C_2$ と書ける。

$x=At+B$，$x=at+b$ がそれぞれ $\ddot{x}(t)=0$ の解だとすると，α, β を任意定数として，

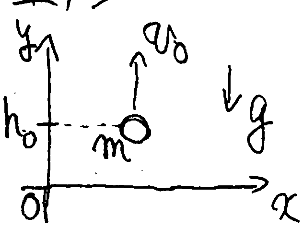
$x=\alpha(At+B)+\beta(at+b)$ もまた解である。

なぜならば，

$$
\begin{aligned}
x &= \alpha(At+B)+\beta(at+b) \\
&= (\alpha A+\beta a)t+(\alpha B+\beta b) \\
&= C_1t+C_2
\end{aligned}
$$

よって $\ddot{x}=0$ に関して，重ね合わせの原理は成立する。

III.3



運動方程式は，

$m\ddot{x}=-mg$

ただし，$t=0$ のとき $x=h_0$，$t=0$ のとき $\dot{x}=v_0$

$m\ddot{x}=-mg$，$\ddot{x}=-g$

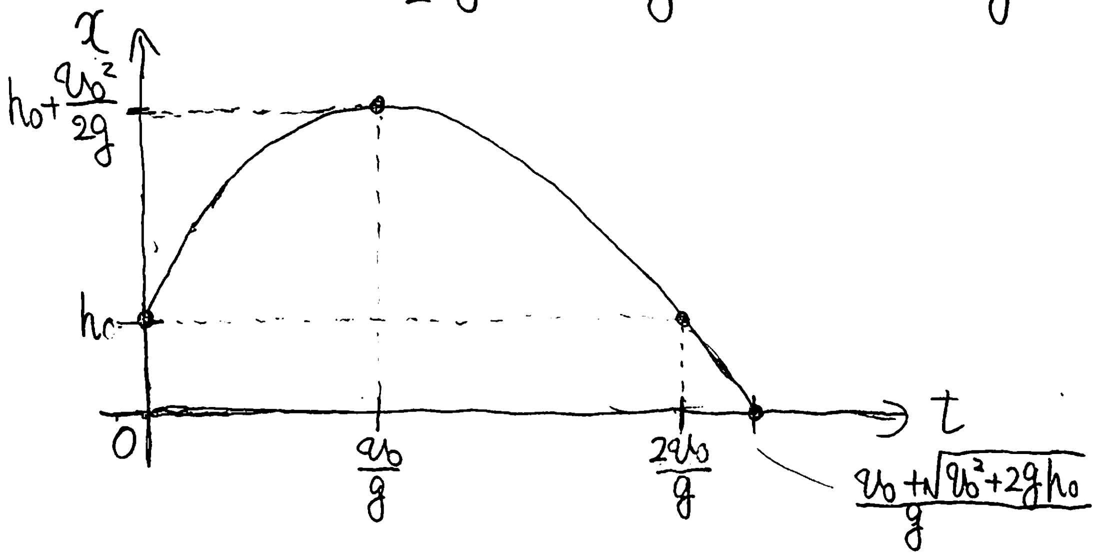
$\dot{x}=-gt+C_1$，$x=-\frac{1}{2}gt^2+C_1t+C_2$

ここで，$t=0$ のとき，$\dot{x}=C_1=v_0$

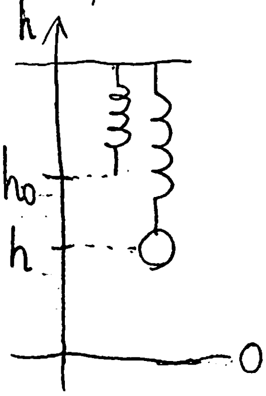
$x=C_2=h_0$

よって　$x = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t + h_0$

$$= -\frac{1}{2}g\left(t - \frac{v_0}{g}\right)^2 + h_0 + \frac{v_0^2}{2g}$$



III.4　ばねが自然長の際の高さをh_0とする。



運動方程式は、

$$m\ddot{h} = k(h_0 - h) - mg$$

III.5　非斉次方程式の一般解は斉次方程式の一般解＋非斉次方程式の特殊解である。

$$m\ddot{h} = k(h_0 - h) - mg$$

$$\ddot{h} = -\frac{k}{m}h + \frac{kh_0}{m} - g$$

$h = C$（定数）とおくと、

$$0 = -\frac{k}{m}C + \frac{kh_0}{m} - g$$

$$\frac{k}{m}C = \frac{kh_0 - mg}{m}$$

$$C = \frac{m(kh_0 - mg)}{k}$$

特解が見つかった。

$\ddot{h}_0 + \frac{k}{m} h_0 = 0$ の一般解は，

$\sqrt{\frac{k}{m}} = \omega$ とおくと，$\ddot{h}_0 = -\omega^2 h_0$ となって

この解は $h_0 = \cos\omega t$，$h_0 = \sin\omega t$ である。

線型性より一般解は，

$h_0 = A\cos\omega t + B\sin\omega t$（$A, B$は任意定数）

よって $m\ddot{h} = k(h_0 - h) - mg$ の一般解は，

$$h = A\cos\sqrt{\frac{k}{m}}t + B\sin\sqrt{\frac{k}{m}}t + \frac{m(kh_0 - mg)}{k}$$

//

III,6　$t = 0$ のとき $h = h_0$，$t = 0$ のとき $v = 0$ である。

$$h(0) = A + \frac{m(kh_0 - mg)}{k} = h_0$$

$$A = h_0 - \frac{m(kh_0 - mg)}{k}$$

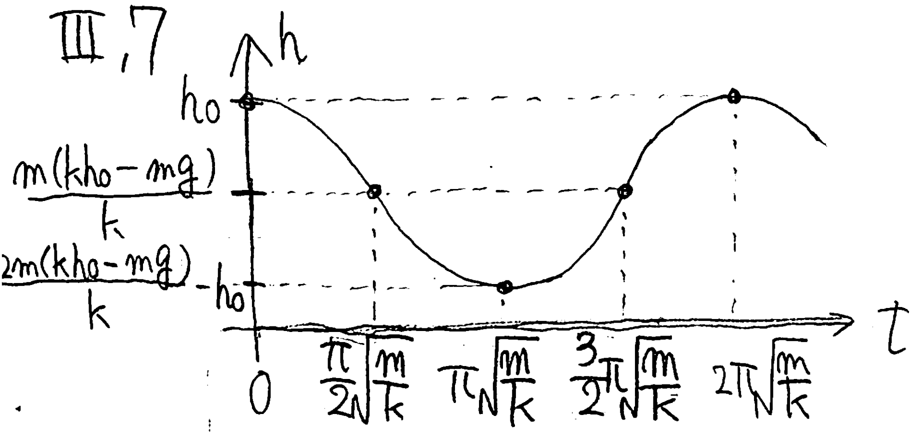
$$\dot{h} = v = -A\sqrt{\frac{k}{m}}\sin\sqrt{\frac{k}{m}}t + B\sqrt{\frac{k}{m}}\cos\sqrt{\frac{k}{m}}t$$

$$\dot{h}(0) = v(0) = B\sqrt{\frac{k}{m}} = 0$$

$$B = 0$$

よって $h(t) = \left(h_0 - \dfrac{m(kh_0 - mg)}{k}\right)\cos\sqrt{\dfrac{k}{m}}\,t + \dfrac{m(kh_0 - mg)}{k}$ //

Ⅲ,7



//

Ⅲ,8 $t=0$ で $h = h_0$, $t = 0$ で $v = v_0$

$$\dot{h}(0) = v(0) = B\sqrt{\frac{k}{m}} = v_0$$

$$B = v_0\sqrt{\frac{m}{k}}$$

よって,

$$h(t) = \left(h_0 - \frac{m(kh_0 - mg)}{k}\right)\cos\sqrt{\frac{k}{m}}\,t + v_0\sqrt{\frac{m}{k}}\sin\sqrt{\frac{k}{m}}\,t + \frac{m(kh_0 - mg)}{k}$$