1. 複素数の基本 (4/06)

◇ 問題 $\sqrt{(x_1+x_2)^2+(y_1+y_2)^2} \leq \sqrt{x_1^2+y_1^2}+\sqrt{x_2^2+y_2^2}$ を直接示せ

○ 解答

$$\sqrt{(x_1+x_2)^2+(y_1+y_2)^2},\ \sqrt{x_1^2+y_1^2},\ \sqrt{x_2^2+y_2^2} \geq 0 \text{ より}$$

$$\begin{aligned} &\sqrt{(x_1+x_2)^2+(y_1+y_2)^2} \leq \sqrt{x_1^2+y_1^2}+\sqrt{x_2^2+y_2^2} \\ \iff &\sqrt{(x_1+x_2)^2+(y_1+y_2)^2}^2 \leq \left(\sqrt{x_1^2+y_1^2}+\sqrt{x_2^2+y_2^2}\ \right)^2 \\ \iff &x_1x_2+y_1y_2 \leq \sqrt{(x_1^2+y_1^2)(x_2^2+y_2^2)} \end{aligned}$$

$$\sqrt{(x_1^2+y_1^2)(x_2^2+y_2^2)} \geq 0 \text{ より}$$

$$\begin{aligned} \iff &(x_1x_2+y_1y_2)^2 \leq \left(\sqrt{(x_1^2+y_1^2)(x_2^2+y_2^2)}\ \right)^2 \\ \iff &0 \leq (x_1y_2-x_2y_1)^2 \end{aligned} \tag{1}$$

(1) と (2) は同値関係にあり、(2) は明らかに正しいので、(1) は正しい。

複素関数の正則性 (4/13)

◇ 問題 i^i、$(1+i)^{1000}$ を求めよ。

○ 解答

$$\begin{aligned} i^i &= e^{i(\frac{\pi}{2}+2\pi n)i} \\ &= e^{-\frac{\pi}{2}+2\pi n} \ (n : \text{整数}) \\ (1+i)^{1000} &= \sqrt{2}^{1000}(\frac{1}{\sqrt{2}}+i\frac{1}{\sqrt{2}})^{1000} \\ &= 2^{500}e^{i(\frac{\pi}{4}+2\pi n)\times 1000} \\ &= 2^{500}e^{i(250\pi+2000\pi n)} \\ &= 2^{500}e^{i2\pi(125+1000n)} \\ &= 2^{500} \end{aligned}$$

◇ 問題 $w = \mathrm{Re[z]}$、$w = \mathrm{Im[z]}$ は複素平面全域で微分可能でないことを示せ。

○ 解答 $z = x + iy$ とおくと

$$\begin{aligned} w = \mathrm{Re[z]} = x &\equiv f(x,y) \\ \frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y} &= 1 \neq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w = \mathrm{Im[z]} = y &\equiv g(x,y) \\ \frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y} &= i \neq 0 \end{aligned}$$

コーシー・リーマン関係を満たさないので、正則関数ではない。したがって、複素平面全域で微分可能でない。

<u>別解</u>

$$w = \mathrm{Re[z]} = \frac{z+\bar{z}}{2} \tag{2}$$

z は明らかに正則関数である。$\bar{z}$ は正則関数ではないことを示す。

$$\frac{d}{dz}\bar{z} = \lim_{\Delta z \to 0}\frac{\overline{z+\Delta z}}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0}\frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z} = \lim_{\Delta x, \Delta y \to 0}\frac{\Delta x - i\Delta y}{\Delta x + i\Delta y}$$

$\Delta y = 0$ のとき、$\frac{d}{dz}\bar{z} = 1$. 一方、$\Delta x = 0$ のとき、$\frac{d}{dz}\bar{z} = -1$.

$\Delta z \to 0$ の近づき方で極限値が異なるから、$\bar{z}$ は正則ではない。したがって、w は正則ではない。($w = \mathrm{Im[z]}$ も同様)

等角性と複素積分の基本 (4/20)

◇ 問題 次の正則関数 $f(z)$ を求めよ。

(a) $\mathrm{Re[f]} = e^x(x\cos(y) - y\sin(y))$

(b) $\mathrm{Re[f]} = \frac{\sin(x)}{\cos(x)+\cosh(y)}$

○ 解答 $f(z) = \mathrm{Re[f]} + i\mathrm{Im[f]} = u(x,y) + iv(x,y)$ とおき、コーシー・リーマンの関係式から $v(x,y)$ を求める。

(a)

$$u_x = e^x(x\cos(y) - y\sin(y) + \cos(y)) = v_y \tag{3}$$

$$u_y = e^x(-x\sin(y) - \sin(y) - y\cos(y)) = -v_x \tag{4}$$

式 (3) より

$$v(x,y) = \int^y dy\ u_x(x,y) + F(x) \quad = e^x(x\sin(y) + y\cos(y)) + F(x)$$

これを式 (4) に代入すると、

$$F'(x) = 0 \qquad \therefore F(x) = \mathrm{Const}$$

したがって、

$$\begin{aligned} f(z) &= e^x(x\cos(y) - y\sin(y)) + ie^x(x\sin(y) + y\cos(y)) + C \\ &= e^x\cos(y)(x+iy) + ie^x\sin(y)(x+iy) + C \\ &= e^x(\cos(y) + i\sin(y))z + C \\ &= ze^{x+iy} + C \\ &= ze^z + C \end{aligned}$$

(b)

$$u_x = \frac{1+\cos(x)\cosh(y)}{(\cos(x)+\cosh(y))^2} = v_y \tag{5}$$

$$u_y = -\frac{\sin(x)\sinh(y)}{(\cos(x)+\cosh(y))^2} = -v_x \tag{6}$$

式 (6) より

$$\begin{aligned} v(x,y) &= -\int^x dx\ u_y(x,y) + G(y) \\ &= \frac{\sinh(y)}{\cos(x)+\cosh(y)} + G(y) \end{aligned}$$

これを式 (5) に代入すると、

$$G'(y) = 0 \qquad \therefore G(y) = \mathrm{Const}$$

したがって、

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{\sin(x) + i\sinh(y)}{\cos(x) + \cosh(y)} + C \\ &= \frac{\sin(x) + \sin(iy)}{\cos(x) + \cos(iy)} + C \\ &= \frac{2\sin(\frac{x+iy}{2})\cos(\frac{x-iy}{2})}{2\cos(\frac{x+iy}{2})\cos(\frac{x-iy}{2})} + C \\ &= \tan(\frac{x+iy}{2}) + C \\ &= \tan(\frac{z}{2}) + C \end{aligned}$$

◇ 問題 次の複素関数の等角性を調べよ。

(a) $w = e^z$

(b) $w = z^2$

○ 解答 $w(x,y) = u(x,y) + iv(x,y)$ とおき、$(x,y) \to (u,v)$ に写像したとき、uv 平面で直交する直線 $u = u_0$ と直線 $v = v_0$ は xy 平面でも直交することを示す。ここで、$(x_0, y_0) \to (u_0, v_0)$ に写るとする。

(a)

$$w = e^x(\cos(y) + i\sin(y))$$

$$\therefore\ u(x,y) = e^x\cos(y),\ v(x,y) = e^x\sin(y)$$

$u(x,y) = u_0$ $v(x,y) = v_0$ の　座標をそれぞれ $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ で表すとすると、両辺をそれぞれ x_1、x_2 で微分すると、

$$y_1' = \tan^{-1}(y_1),\ y_2' = -\tan(y_2)$$

が得られる。、交点 (x_0, y_0) での傾きの積をとると、

$$y_1'(x_0, y_0) \cdot y_2'(x_0, y_0) = \tan^{-1}(y_0) \cdot (-\tan y_0) = -1$$

したがって、xy 平面でも直交する。等角性が示された。

(b)

$$w = x^2 - y^2 + i2xy$$

$$\therefore\ u(x,y) = x^2 - y^2,\ v(x,y) = 2xy$$

$u(x,y) = u_0\ v(x,y) = v_0$ の　座標をそれぞれ $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ で表すとすると、両辺をそれぞれ x_1、x_2 で微分すると、

$$y_1' = \frac{x_1}{y_1},\ y_2' = -\frac{y_2}{x_2}$$

が得られる。、交点 (x_0, y_0) での傾きの積をとると、

$$y_1'(x_0,y_0) \cdot y_2'(x_0,y_0) = \frac{x_0}{y_0} \cdot (-\frac{y_0}{x_0}) = -1$$

したがって、xy 平面でも直交する。等角性が示された。

◇ 問題 次の複素積分求めよ。(C:単位円を正の向きに沿って一周積分する)

(a) $I_1 = \int_C dz\ z$
(b) $I_2 = \int_C dz\ z^2$
(c) $I_3 = \int_C dz\ z^{-1}$
(d) $I_4 = \int_C dz\ z^{-2}$

○ 解答 まず、任意の整数 n に対して、次の複素積分を計算する。

$$\int_C dz\ z^n$$

$z(t) = e^{it} (0 \leq \theta \leq 2\pi)$ とおく

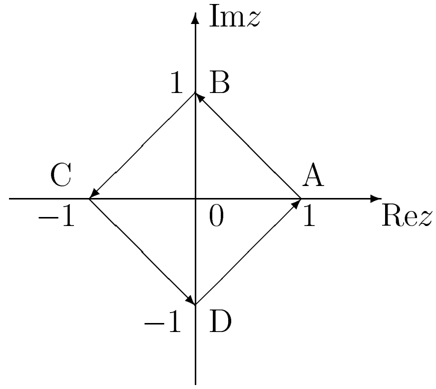
$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^{2\pi} dt z'(t)\ z^n(t) \\ &= \int_0^{2\pi} dt i e^{it} e^{int} \\ &= i \int_0^{2\pi} dt e^{(n+1)it} \\ &= \begin{cases} i \int_0^{2\pi} dt & = 2\pi i \quad (n = -1) \\ i \frac{1}{(n+1)i} e^{(n+1)it} \Big|_0^{2\pi} & = 0 \quad (n \neq -1) \end{cases} \end{aligned}$$

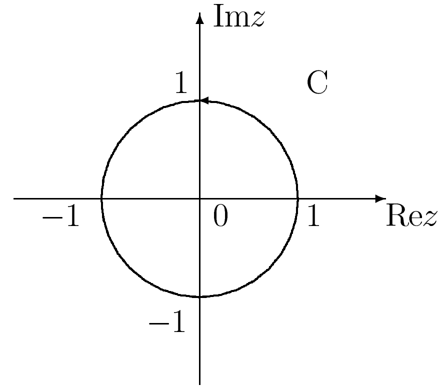
$\therefore\ I_1 = I_2 = I_4 = 0,\ I_3 = 2\pi i$

2. 留数と複素積分 (5/11)

◇ 問題 次の複素積分を求めよ。

$$I_1 = \int_{\mathrm{ABCD}} dz \frac{1}{z} \qquad\qquad I_2 = \int_C dz \frac{1}{z}$$





○ 解答

$$\begin{aligned}
I_1 &= \left(\int_{\mathrm{AB}} + \int_{\mathrm{BC}} + \int_{\mathrm{CD}} + \int_{\mathrm{DA}}\right) dz \frac{1}{z} \\
&= \int_0^1 dt (i-1) \frac{1}{1+(i-1)t} + \int_0^1 dt(-1-i)\frac{1}{1+(-1-i)t} \\
&\quad + \int_0^1 dt(-i+1)\frac{1}{-1+(-i+1)t} + \int_0^1 dt(1+i)\frac{1}{-i+(1+i)t} \\
&= 2\int_0^1 dt(i-1)\frac{1}{1+(i-1)t} + 2\int_0^1 dt(-1-i)\frac{1}{1+(-1-i)t} \\
&= \int_0^1 dt \frac{(i-1)+(1+i)i}{1+(i-1)t} \\
&= 4\int_0^1 dt \frac{i-1}{1+(i-1)t} \\
&= 4\log\big[(i-1)t+1\big]\Big|_0^1 \\
&= 4\Big(\log i - \log 1\Big) \\
&= 2\pi i
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
I_2 &= \int_0^{2\pi} dt z'(t)\ z^{-1}(t) \quad (z(t) = e^{it}) \\
&= \int_0^{2\pi} dt i e^{it} e^{-it} \\
&= i \int_0^{2\pi} dt = 2\pi i
\end{aligned}
$$

◇ 問題 次の複素関数の特異点と留数を求めよ。

(a) $f(z) = \cot z$

(b) $f(z) = \frac{1}{z^2 \sin z}$

○ 解答 (a)

$$f(z) = \cot z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{e^{iz} - e^{-iz}}$$

なので

$$e^{iz} - e^{-iz} = 0 \Leftrightarrow z = \pi n \qquad n : \text{integer}$$

が極である。

$$\lim_{z\to\pi n} (z - \pi n) \cot z = \lim_{z\to\pi n} \frac{z - \pi n}{\tan z} = \cos^2 z\Big|_{z=\pi n} = 1$$

より、一位の極であることがわかる。このとき、留数は

$$\mathrm{Res} f(z)\Big|_{z=\pi n} = \lim_{z\to\pi n} [(z - \pi n) f(z)] = 1$$

(b)

$$\sin z = 0 \Leftrightarrow z = \pi n \qquad n : \text{integer}$$

よって、$z = \pi n$ のとき、極となる。

$z = 0$ $(n = 0)$ のとき、

$$\lim_{z\to 0} z^3 \frac{1}{z^2 \sin z} = 1$$

したがって、三位の極である。このとき、留数は

$$\mathrm{Res} f(z)\Big|_{z=0} = \lim_{z\to 0} \frac{1}{2!} \frac{d^2}{dz^2} z^3 f(z)] = \frac{1}{6}$$

$$\because \ \frac{d^2}{dz^2}\frac{z}{\sin z} = \frac{-2\sin z\cos z + x\cos^2 z + z}{\sin^3 z}$$
$$= \frac{1}{3} + \frac{7}{30}z^2 + \frac{31}{504}z^4 + \vartheta(z^5)$$

$z = n\pi \ (n \neq 0)$ のとき、

$$\lim_{z\to n\pi}(z-n\pi)\cdot\frac{1}{z^2\sin z} = \frac{(-1)^n}{(n\pi)^2}$$

したがって、一位の極である。このとき、留数は

$$\mathrm{Res} f(z)\Big|_{z=n\pi} = \lim_{z\to n\pi}(z-n\pi)f(z) = \frac{(-1)^n}{(n\pi)^2}$$

◇ 問題 次の複素積分を求めよ。

(a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{x^4+1}dx$

(b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{x^{2n}+1}dx \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots)$

○ 解答 (a) 複素積分 $\displaystyle\int_C \frac{1}{z^4+1}dz$ を考える。

$z^4 + 1 = 0 \leftrightarrow z = e^{i\frac{1}{4}\pi}, e^{i\frac{3}{4}\pi}, e^{i\frac{5}{4}\pi}, e^{i\frac{7}{4}\pi}$ で 1 位の極なので、留数定理より

$$\begin{aligned}\int_C \frac{1}{z^4+1}dz &= 2\pi i\left(\mathrm{Res}(\mathrm{z}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{1}{4}\pi}) + \mathrm{Res}(\mathrm{z}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3}{4}\pi})\right)\\ &= 2\pi i\left(\lim_{z\to e^{i\frac{1}{4}\pi}}\tfrac{z-e^{i\frac{1}{4}\pi}}{z^4+1} + \lim_{z\to e^{i\frac{3}{4}\pi}}\tfrac{z-e^{i\frac{3}{4}\pi}}{z^4+1}\right)\\ &= 2\pi i\,(\frac{e^{-i\frac{3}{4}\pi}}{4} + \frac{e^{-i\frac{9}{4}\pi}}{4})\\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\pi i\end{aligned}$$

一方、C_{R} 上の積分はジョルダンの補助定理により、$R \to \infty$ で消えるので、

$$\int_C = \int_{-R}^{R} + \int_{C_R} \xrightarrow{R\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty}$$

したがって、

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{x^4+1}dx = \frac{\sqrt{2}}{2}\pi$$

(b) 上と同様にして、複素積分 $\int_C \frac{1}{z^{2n}+1}dz$ を考える。

$z^{2n}+1=0 \leftrightarrow z=e^{i\frac{1}{2n}\pi}, e^{i\frac{3}{2n}\pi}.e^{i\frac{2n-1}{2n}\pi}$ で 1 位の極なので、留数定理より

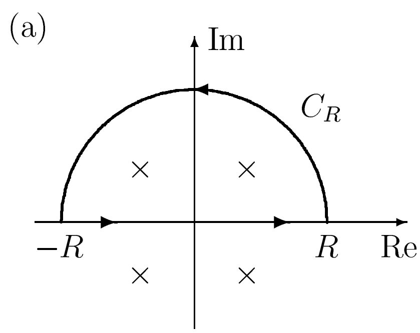
$$\begin{aligned}
\int_C \frac{1}{z^{2n}+1}dz &= 2\pi i \sum_{m=0}^{n-1} \mathrm{Res}(z=e^{i\frac{2m+1}{2n}\pi}) \\
&= 2\pi i \sum_{m=0}^{n-1} \frac{z^{-2n+1}}{2n}\Big|_{z=e^{i\frac{2m+1}{2n}\pi}} \\
&= 2\pi i \cdot \frac{e^{i\frac{-2n+1}{2n}\pi}}{2n} \sum_{m=0}^{n-1} e^{i\frac{m}{n}\pi} \\
&= \frac{\pi}{n\sin\frac{\pi}{2n}}
\end{aligned}$$

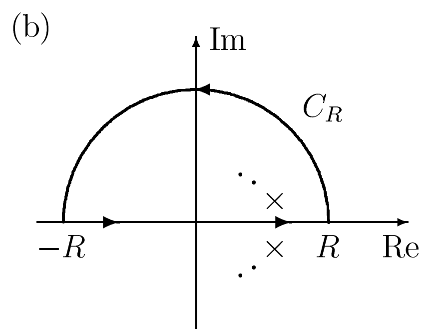
同様に、C_{R} 上の積分はジョルダンの補助定理により、$R\to\infty$ で消えるので、

$$\int_C = \int_{-R}^{R} + \int_{C_R} \xrightarrow{R\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty}$$

したがって、

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^{2n}+1}dx = \frac{\pi}{n\sin\frac{\pi}{2n}}$$





3. 複素積分 (5/18)

◇ 問題 次の積分 $n = 1,\ 2,\ 3,\ 4$ の場合について求めよ。

$$I_n = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^n dx$$

○ 解答 (a) $n = 1$ のとき、複素関数 $\dfrac{e^{iz}}{z}$ を下の図の閉曲線 (C) に沿って積分する。

コーシーの積分定理より、

$$\oint_C dz \frac{e^{iz}}{z} = 0$$

また、

$$\oint_C = \int_{\varepsilon}^{R} + \int_{C_R} + \int_{-R}^{-\varepsilon} + \int_{C_\varepsilon}$$

各経路について積分を行うと、

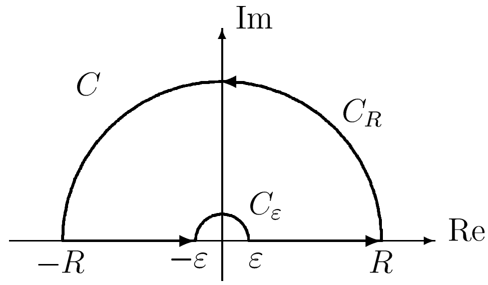
$$\left[\int_{-R}^{-\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^{R}\right] dx \frac{e^{ix}}{x} = \int_{\varepsilon}^{R} dx \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{x} = 2i \int_{\varepsilon}^{R} dx \frac{\sin x}{x}$$

$$\int_{C_\varepsilon} dz\ \frac{e^{iz}}{z} = \int_{\pi}^{0} d\theta\ i\varepsilon e^{i\theta} \cdot \frac{e^{i\varepsilon e^{i\theta}}}{\varepsilon e^{i\theta}} \overset{\varepsilon \to 0}{\to} \int_{\pi}^{0} d\theta i = -i\pi$$

$\displaystyle\int_{C_R} dz\ \frac{e^{iz}}{z}$ はジョルダンの補助定理より、$R \to \infty$ で消える。

したがって、$R \to \infty$、$\varepsilon \to 0$ の極限で、

$$\begin{aligned} 0 &= \left[\int_{\varepsilon}^{R} + \int_{C_R} + \int_{-R}^{-\varepsilon} + \int_{C_\varepsilon}\right] dz \frac{e^{iz}}{z} \\ &= 2i \int_{0}^{\infty} dx \frac{\sin x}{x} - i\pi \end{aligned}$$



$$\therefore \int_0^\infty dx \frac{\sin x}{x} = \frac{\pi}{2} = I_1$$

(b) $n = 2$ のとき、複素積分 $\oint_C dz \frac{1 - e^{i2z}}{z^2}$ を計算する。

コーシーの積分定理より、

$$\oint_C dz \frac{1 - e^{2iz}}{z^2} = 0$$

である。また

$$\int_C = \int_\varepsilon^R + \int_{C_1} + \int_{-R}^{-\varepsilon} + \int_{C_2}$$

各経路について積分すると、

$$\begin{aligned}
\left[\int_\varepsilon^R + \int_{-R}^{-\varepsilon} \right] dx \frac{1 - e^{2ix}}{x^2} &= \int_\varepsilon^R dx \frac{1 - e^{2ix}}{x^2} + \int_{-R}^{-\varepsilon} dx \frac{1 - e^{2ix}}{x^2} \\
&= \int_\varepsilon^R dx \frac{1 - e^{2ix} + 1 - e^{-2ix}}{x^2} \\
&= 4 \int_\varepsilon^R dx \frac{\sin^2 x}{x^2}
\end{aligned}$$

$$\int_{C_\varepsilon} dz \frac{1 - e^{i2z}}{z^2} = \int_\pi^0 d\theta i \frac{1 - e^{2i\varepsilon e^{i\theta}}}{\varepsilon e^{i\theta}} \overset{\varepsilon \to 0}{\longrightarrow} -2\pi$$

また

$$\begin{aligned}
\left| \int_{C_R} dz \frac{1 - e^{i2z}}{z^2} \right| &\leq \int_0^\pi \left| R e^{i\theta} d\theta \right| \left| \frac{1 - e^{2iRe^{i\theta}}}{R^2 e^{2i\theta}} \right| \\
&\leq \int_0^\pi d\theta \, \frac{1}{R} \\
&= \frac{1}{R} \pi \\
&\overset{R \to \infty}{\longrightarrow} 0
\end{aligned}$$

したがって、$R \to \infty$、$\varepsilon \to 0$ の極限で

$$\int_0^\infty dx \frac{\sin^2 x}{x^2} = \frac{\pi}{2} = I_2$$

(c) $n=3$ のとき、複素積分 $\oint_C dz\dfrac{3e^{iz}-e^{i3z}-2}{z^3}$ を計算する。

コーシーの積分定理より、

$$\oint_C dz\frac{3e^{iz}-e^{i3z}-2}{z^3}=0$$

である。また

$$\int_C=\int_\varepsilon^R+\int_{C_1}+\int_{-R}^{-\varepsilon}+\int_{C_2}$$

各経路について積分すると、

$$\begin{aligned}
&\left[\int_\varepsilon^R+\int_{-R}^{-\varepsilon}\right]dx\frac{3e^{ix}-e^{i3x}-2}{x^3}\\
=\ &\int_\varepsilon^R dx\frac{3e^{ix}-e^{i3x}-2}{x^3}+\int_{-R}^{-\varepsilon}dx\frac{3e^{ix}-e^{i3x}-2}{x^3}\\
=\ &\int_\varepsilon^R dx\frac{3e^{ix}-e^{i3x}-2-(3e^{-ix}-e^{-i3x}-2)}{x^3}\\
=\ &\int_\varepsilon^R dx\frac{6i\sin x-2i\sin 3x}{x^3}\\
=\ &8i\int_\varepsilon^R dx\frac{\sin^3 x}{x^3}
\end{aligned}$$

また

$$\begin{aligned}
&\int_{C_\varepsilon}dz\frac{3e^{iz}-e^{i3z}-2}{z^3}\\
=\ &\int_\pi^0 d\theta\ i\varepsilon e^{i\theta}\frac{3e^{i\varepsilon e^{i\theta}}-e^{i3\varepsilon e^{i\theta}}-2}{\varepsilon^3e^{i3\theta}}\\
=\ &\int_\pi^0 d\theta\ i\frac{3(1+i\varepsilon e^{i\theta}-\frac{1}{2}\varepsilon^2e^{i2\theta})-(1+i3\varepsilon e^{i\theta}-\frac{9}{2}\varepsilon^2e^{i2\theta})-2+\vartheta(\varepsilon^3)}{\varepsilon^2e^{i2\theta}}\\
=\ &\int_\pi^0\ 3i\ =-3\pi i
\end{aligned}$$

さらに、C_R での積分は (b) と同様にして、ジョルダンの補助定理を使って、$R\to\infty$ で消えることが示せる。

したがって、$R\to\infty$、$\varepsilon\to 0$ の極限で

$$\int_0^\infty dx\frac{\sin^3 x}{x^3}=\frac{3}{8}\pi=I_3$$

(d) $n=4$ のとき、複素積分 $\oint_C dz \frac{e^{i4z}-6e^{i2z}+8e^{iz}-3}{z^4}$ を計算する。

コーシーの積分定理より、

$$\oint_C dz \frac{e^{i4z}-6e^{i2z}+8e^{iz}-3}{z^4} = 0$$

である。また

$$\int_C = \int_\varepsilon^R + \int_{C_1} + \int_{-R}^{-\varepsilon} + \int_{C_2}$$

各経路について積分すると、

$$\begin{aligned}
& \left[\int_\varepsilon^R + \int_{-R}^{-\varepsilon}\right] dx \frac{e^{i4x}-6e^{i2x}+8e^{ix}-3}{x^4} \\
= & \int_\varepsilon^R dx \, \frac{e^{i4x}-6e^{i2x}+8e^{ix}-3}{z^4} + \int_{-R}^{-\varepsilon} dx \, \frac{e^{i4x}-6e^{i2x}+8e^{ix}-3}{x^4} \\
= & \int_\varepsilon^R dx \, \frac{e^{i4x}-6e^{i2x}+8e^{ix}-3+e^{-i4x}-6e^{-i2x}+8e^{-ix}-3}{x^4} \\
= & \int_\varepsilon^R dx \, 2 \, \frac{\cos 4x - 6\cos 2x + 8\cos x - 3}{x^4} \\
= & \int_\varepsilon^R dx \, \frac{8\sin^4 x + 4\sin^2 x - 16\sin^2 \frac{x}{2}}{x^4} \\
= & \; 8i \int_\varepsilon^R dx \, 16 \, \frac{\sin^4 x - 2\sin^4 \frac{x}{2}}{x^4} \\
= & \; 16 \Bigg\{ \underbrace{\int_\varepsilon^R dx \, \frac{\sin^4 x}{x^4}}_{=I_4} - \frac{1}{4} \underbrace{\int_\varepsilon^R d(\frac{x}{2}) \, \frac{\sin^4 \frac{x}{2}}{(\frac{x}{2})^4}}_{=I_4} \Bigg\} \\
= & \; 12 \, I_4
\end{aligned}$$

また

$$
\begin{aligned}
&\int_{C_\varepsilon} dz\, \frac{e^{i4z} - 6e^{i2z} + 8e^{iz} - 3}{z^4} \\
=& \int_\pi^0 d\theta\; i\varepsilon e^{i\theta} \frac{e^{i4\varepsilon e^{i\theta}} - 6e^{i2\varepsilon e^{i\theta}} - 3}{\varepsilon^4 e^{i4\theta}} \\
=& \int_\pi^0 d\theta\; i \left\{ \frac{(1 + i4\varepsilon e^{i\theta} - 8\varepsilon^2 e^{i2\theta} - i\frac{32}{3}\varepsilon^3 e^{i3\theta}) - 6(1 + i2\varepsilon e^{i\theta} - 2\varepsilon^2 e^{i2\theta}}{\varepsilon^3 e^{i3\theta}} \right. \\
& \left. \frac{-\frac{8}{3}\varepsilon^3 e^{i3\theta}) + 8(1 + i\varepsilon e^{i\theta} - \frac{1}{2}\varepsilon^2 e^{i2\theta} - i\frac{1}{6}\varepsilon^3 e^{i3\theta}) - 3 + \vartheta(\varepsilon^4)}{\varepsilon^3 e^{i3\theta}} \right\} \\
=& \int_\pi^0\; 3i + \vartheta(\varepsilon) \overset{\varepsilon\to 0}{\to} -3\pi i
\end{aligned}
$$

さらに、C_R での積分は (b) と同様にして、ジョルダンの補助定理を使って、$R \to \infty$ で消えることが示せる。

したがって、$R \to \infty$、$\varepsilon \to 0$ の極限で

$$12 I_4 = 3\pi$$

$$\therefore \quad \int_0^\infty dx \frac{\sin^4 x}{x^4} = \frac{\pi}{3} = I_4$$

<u>open question</u>

一般的に I_n について求めることはできるのか？

(解けた人は是非教えてください。)

4. フーリエ級数 (6/1)

◇ 問題 $\delta_M = \frac{1}{2\pi}\sum_{l=-M}^{M} e^{ilx}$ を導け

○ 解答

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi}\sum_{l=-M}^{M} e^{ixl} &= \frac{1}{2\pi}\left(\sum_{l=0}^{M} e^{ixl} + \sum_{l=0}^{M} e^{-ixl} - 1\right) \\
&= \frac{1}{2\pi}\left(\frac{1-e^{ix(M+1)}}{1-e^{ix}} + \frac{1-e^{-ix(M+1)}}{1-e^{-ix}} - 1\right) \\
&= \frac{1}{2\pi}\frac{e^{ixM}+e^{-ixM}-e^{ix(M+1)}-e^{-ix(M+1)}}{(1-e^{ix})(1-e^{-ix})} \\
&= \frac{1}{2\pi}\frac{e^{ixM}e^{ix/2}(e^{-ix/2}-e^{ix/2})+e^{-ixM}e^{-ix/2}(e^{ix/2}-e^{-ix/2})}{(e^{-ix/2}-e^{ix/2})(e^{ix/2}-e^{-ix/2})} \\
&= \frac{1}{2\pi}\frac{\sin x(M+\frac{1}{2})}{\sin\frac{x}{2}}
\end{aligned}
$$

5. 複素フーリエ級数 (6/8)

◇ 問題 $-\pi \le x \le \pi$ で定義された次の関数を複素フーリエ級数に展開せよ。

(a) $f_1(x) = x$

(b) $f_2(x) = e^x$

(c) $f_3(x) = e^{ae^{ix}}$

○ 解答 (a)

$$\begin{aligned} c_0 &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dx\ x = 0 \\ c_l &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dx\ x e^{-ilx} \\ &= \frac{1}{2\pi}\frac{1}{-il}\ x\ e^{-ilx}\Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{2\pi}\frac{1}{-il}\int_{\pi}^{\pi} dx\ e^{-ilx} \\ &= \frac{1}{2\pi}\frac{1}{-il}\ \pi\ 2\cos l\pi \\ &= i\frac{(-1)^{l+1}}{l} \end{aligned}$$

よって、

$$f_1(x) = \sum_{\substack{l=-\infty \\ (l\neq 0)}}^{\infty} i\ \frac{(-1)^{l+1}}{l}\ e^{ilx}$$

(b)

$$\begin{aligned} c_l &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dx\ e^x e^{-ilx} \\ &= \frac{1}{2\pi}\frac{1}{1-il}(e^{(1-il)\pi} - e^{-(1-il)\pi}) \\ &= \frac{1}{\pi}\frac{1}{1-il}(-1)^l \sinh\pi \end{aligned}$$

よって、

$$f_2(x) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi}\frac{1}{1-il}(-1)^l \sinh\pi e^{ilx}$$

(c) Taylor 展開すると、

$$\begin{aligned} e^{ae^{ix}} &= \sum_{0}^{\infty} \frac{a^l}{l!} e^{ilx} \\ &= 1 + \sum_{l=1}^{\infty} \frac{a^l}{l!} e^{ilx} \end{aligned}$$

◇ 問題 $f(x) = x$ を次の区間で三角級数へ展開をせよ。

(a) $0 < x < 2\pi$

(b) $-\pi < x < \pi$

○ 解答 (a) 区間 $(0, 2\pi)$ で展開すると、

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} dx\ x = 2\pi \\
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} dx\ x\cos nx = \frac{1}{\pi}x\frac{1}{n}\sin x\Big|_0^{2\pi} - \frac{1}{n\pi}\int_0^{2\pi} dx\ \ \sin nx = 0 \quad (n \neq 0) \\
b_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} dx\ x\sin nx = \frac{1}{\pi}x\frac{-1}{n}\cos nx\Big|_0^{2\pi} + \frac{1}{n\pi}\int_0^{2\pi} dx\cos nx = -\frac{2}{n}
\end{aligned}$$

よって

$$x\Big|_{[0,2\pi]} = \pi - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n}\sin nx$$

(b) 区間 $(0, 2\pi)$ で展開すると、

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dx\ x = 0, \quad a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dx\ x\cos nx = 0 \\
b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dx\ x\sin nx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} dx\ x\sin nx \\
&= \frac{2}{\pi}x\frac{-1}{n}\cos nx\Big|_0^{\pi} + \frac{2}{n\pi}\int_0^{\pi} dx\cos nx = (-1)^{n+1}\frac{2}{n}
\end{aligned}$$

よって

$$x\Big|_{[-\pi,\pi]} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2}{n}\sin nx$$

6. 偏微分方程式 (6/22)

◇ 問題 三次元ヘルムホルツ方程式の Green 関数 $G^{\pm}$ を求めよ。

$$-(\triangle^2 + k_{\pm}^2)G^{\pm}(\boldsymbol{r}) = \delta(\boldsymbol{r})$$
$$k^{\pm} = k \pm i0$$

○ 解答

$$-(-k^2 + K^2)G^{\pm}(\boldsymbol{k}) = 1$$
$$G^{\pm}(\boldsymbol{k}) = -\frac{1}{K^2 - k^2}$$

逆フーリエ変換を行うと

$$\begin{aligned}
G^{\pm}(\boldsymbol{r}) &= -\frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3k\ \frac{e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}}{K_{\pm}^2 - k^2} \\
&= -\frac{1}{(2\pi)^3}\int_0^{\infty} dk\ k^2 \frac{1}{K_{\pm}^2 - k^2}\int_0^{\pi} d\theta\ \sin\theta e^{ikr\cos\theta} \\
&= -\frac{1}{(2\pi)^2}\int_0^{\infty} dk\ \frac{k^2}{K_{\pm}^2 - k^2}\int_1^{-1} -dt\ e^{ikrt}\ (t = \cos\theta) \\
&= -\frac{1}{(2\pi)^2}\frac{1}{ir}\int_0^{\infty} dk\ \frac{k}{K_{\pm}^2 - k^2}(e^{ikr} - e^{-ikr}) \\
&= -\frac{1}{(2\pi)^2}\frac{1}{ir}\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} dk\ \frac{k}{K_{\pm}^2 - k^2}(e^{ikr} - e^{-ikr}) \quad (\because \text{Integrand is even}) \\
&= -\frac{1}{(2\pi)^2}\frac{1}{ir}\int_{-\infty}^{\infty} dk\ \frac{k}{K_{\pm}^2 - k^2}e^{ikr}
\end{aligned}$$

$$(\because)\int_{-\infty}^{\infty} dk\ \frac{k}{K_{\pm}^2 - k^2}e^{-ikr} \underset{k'=-k}{=} \int_{\infty}^{-\infty} -dk'\ \frac{-k'}{K_{\pm}^2 - k'^2}e^{ik'r} = \int_{-\infty}^{\infty} dk\ \frac{k'}{K_{\pm}^2 - k'^2}e^{ik'r}$$

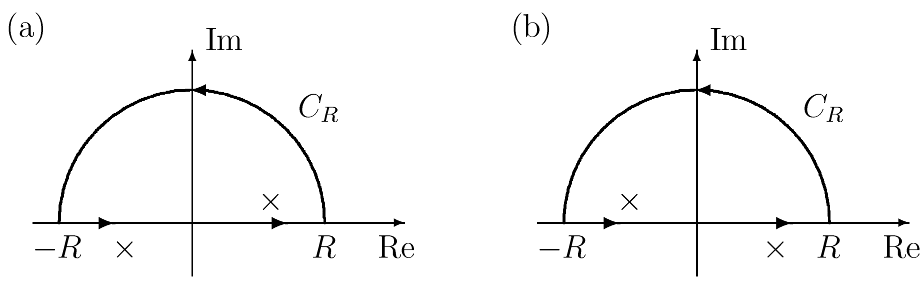


図 1: 複素積分の経路と極。(左) G^+ の場合, (右) G^- の場合。

ここで、G^+、G^- それぞれについて図 1 のような周回積分を考える。

$$\oint_C dz\ \frac{z}{K_\pm^2 - z^2}e^{irz} = \int_{-R}^{R} dk\ \frac{k}{K_\pm^2 - k^2}e^{ikr} + \int_{C_\mathrm{R}} dz\ \frac{z}{z_\pm^2 - z^2}e^{irz}$$

$R \to \infty$ の極限で、第二項はジョルダンの補助定理で 0 となる。一方、留数定理より

$$\begin{aligned}\oint_C dz\ \frac{z}{K_\pm^2 - z^2}e^{irz} &= \begin{cases} 2\pi i \mathrm{Res}(z = K_+) & (\text{for } G^+) \\ 2\pi i \mathrm{Res}(z = -K_-) & (\text{for } G^-) \end{cases} \\ &= -\pi i e^{\pm iKr}\end{aligned}$$

したがって、$R \to \infty$ の極限で

$$\begin{aligned}G^\pm(\boldsymbol{r}) &= -\frac{1}{(2\pi)^2}\frac{1}{ir}\int_{-\infty}^{\infty} dk\ \frac{k}{K_\pm^2 - k^2}e^{ikr} \\ &= -\frac{1}{(2\pi)^2}\frac{1}{ir}(-\pi i)e^{\pm iKr} \\ &= \frac{1}{4\pi}\frac{e^{\pm iKr}}{r}\end{aligned}$$

◇ 問題　極座標 (r, θ, ϕ) で、$\boldsymbol{e}_r = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial r},\ \boldsymbol{e}_\theta \frac{\partial \boldsymbol{\theta}}{\partial \theta}/|\frac{\partial \boldsymbol{\theta}}{\partial \theta}|,\ \boldsymbol{e}_\phi \frac{\partial \boldsymbol{\phi}}{\partial \phi}/|\frac{\partial \boldsymbol{\phi}}{\partial \phi}|$ が完全であることを示せ。

$$\sum_\alpha (\boldsymbol{e}_\alpha)_i (\boldsymbol{e}_\alpha)_j = \delta_{ij}$$

○ 解答　カーテシアン座標の基底ベクトルを用いると、

$$\boldsymbol{r} = r\sin\theta\cos\phi\boldsymbol{e}_x + r\sin\theta\sin\phi\boldsymbol{e}_y + r\cos\theta\boldsymbol{e}_z$$

これより、

$$\begin{aligned}\boldsymbol{e}_r = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial r}/|\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial r}| &= \sin\theta\cos\phi\boldsymbol{e}_x + \sin\theta\sin\phi\boldsymbol{e}_y + \cos\theta\boldsymbol{e}_z \\ \boldsymbol{e}_\theta = \frac{\partial \boldsymbol{\theta}}{\partial \theta}/|\frac{\partial \boldsymbol{\theta}}{\partial \theta}| &= \cos\theta\cos\phi\boldsymbol{e}_x + \cos\theta\sin\phi\boldsymbol{e}_y - \sin\theta\boldsymbol{e}_z \\ \boldsymbol{e}_\phi = \frac{\partial \boldsymbol{\phi}}{\partial \phi}/|\frac{\partial \boldsymbol{\phi}}{\partial \phi}| &= -\sin\phi\boldsymbol{e}_x + \cos\phi\boldsymbol{e}_y\end{aligned}$$

と求まる。よって

$$
\begin{aligned}
\sum_\alpha (\boldsymbol{e}_\alpha)_x (\boldsymbol{e}_\alpha)_x &= \sin^2\theta\cos^2\phi + \cos^2\theta\cos^2\phi + \sin^2\phi \\
&= 1 \\
\sum_\alpha (\boldsymbol{e}_\alpha)_y (\boldsymbol{e}_\alpha)_y &= \sin^2\theta\sin^2\phi + \cos^2\theta\sin^2\phi + \cos^2\phi \\
&= 1 \\
\sum_\alpha (\boldsymbol{e}_\alpha)_z (\boldsymbol{e}_\alpha)_z &= \cos^2\theta + \sin^2\theta \\
&= 1 \\
\sum_\alpha (\boldsymbol{e}_\alpha)_x (\boldsymbol{e}_\alpha)_y = \sum_\alpha (\boldsymbol{e}_\alpha)_y (\boldsymbol{e}_\alpha)_x &= \sin^2\theta\cos\phi\sin\phi + \cos^2\theta\sin\phi\cos\phi - \sin\phi\cos\phi \\
&= 0 \\
\sum_\alpha (\boldsymbol{e}_\alpha)_y (\boldsymbol{e}_\alpha)_z = \sum_\alpha (\boldsymbol{e}_\alpha)_z (\boldsymbol{e}_\alpha)_y &= \sin\theta\cos\theta\sin\phi - \cos\theta\sin\theta\sin\phi + 0 \\
&= 0 \\
\sum_\alpha (\boldsymbol{e}_\alpha)_z (\boldsymbol{e}_\alpha)_x = \sum_\alpha (\boldsymbol{e}_\alpha)_x (\boldsymbol{e}_\alpha)_z &= \sin\theta\cos\theta\cos\phi - \cos\theta\sin\theta\cos\phi + 0 \\
&= 0
\end{aligned}
$$

以上より

$$
\sum_\alpha (\boldsymbol{e}_\alpha)_i (\boldsymbol{e}_\alpha)_j = \delta_{ij}
$$